



Modèle de longueur de piste $\begin{array}{c} au\ d\acute{e}collage\text{-}atterrissage \\ {}_{Avions\ de\ transport\ civil} \end{array}$



 $Fig. \ 1 - \textit{Premier d\'ecollage de l'A380 \`a} \ \textit{Toulouse Blagnac le 27 avril 2005}. \ \textit{Photo Sam Chui}$

Thèse : Pour une approche analytique de la Dynamique du Vol.

Volume: 3

Directeur de thèse : Jean-Luc Boiffier.

Doctorante: Élodie Roux.

Date: 2006

ONÉRA CERT

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales Département Commande des Systèmes et Dynamique du vol : DCSD BP 4025

2, Avenue Édouard Belin 31055 Toulouse Cedex 4 Tél: +33 (0)5 62 25 25 61 Fax: +33 (0)5 62 25 25 64

http://www.onera.fr

SupAéro

École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace BP 54032

10, Avenue Édouard Belin 31055 Toulouse Cedex 4 Tél: +33 (0)5 62 17 80 80 http://www.supaero.fr

Directeur de thèse :

Jean-Luc Boiffier

SupAéro : 10, Avenue Édouard Belin

BP 54032

 $\begin{array}{l} 31055 \; \text{Toulouse Cedex} \\ \text{T\'el}: 33\text{-}(0)5.62.17.80.84 \\ \text{Fax}: 33\text{-}(0)5.62.17.83.45 \\ \textit{Jean-Luc.Boiffier@cert.fr} \end{array}$

${\bf Doctorante:}$

Élodie Roux

 $4~{\rm ter},$ avenue des Tilleuls

"Le Pileu" 91300 Massy

 $\begin{array}{l} {\rm T\'el}: 33\text{-}(0)1.60.14.50.14 \\ {\rm Fax}: 33\text{-}(0)1.69.34.95.35 \\ {\it Elodie.Roux@supaero.org} \end{array}$

Préambule:

Le décollage est l'un des points clef de l'étude de performances des avions de transport civil. Il existe des modèles très simplifiés, fondés sur une application du théorème de l'énergie cinétique, permettant d'estimer la longueur de piste au décollage, pour une famille d'avions restreinte. L'enjeu de notre étude est d'élaborer un modèle analytique, de forme plus généraliste, intégrant des modèles de poussée et de frottement plus sophistiqués.

Ce modèle présente les avantages d'améliorer les temps de calculs par rapport à des simulations numériques de décollage (y compris pour les calculs embarqués), et de favoriser l'analyse des sensibilités paramétriques des performances au décollage.

La résolution analytique des équations de la mécanique nous ont permis d'élaborer un modèle de roulage intégrant un modèle de poussée très complet de la même forme que celui que nous avons élaboré [Rou02]. Outre le gain en précision apportée par une modélisation de poussée adaptée, cela permet d'envisager les études conceptuelles visant à choisir les moteurs optimaux (notamment par le choix du taux de dilution optimal). Notre modèle de roulage (Section 6, p. 113) permet également de tenir compte de la variation du coefficient de frottement pneu/piste en fonction de la vitesse, ce qui n'avait jamais été fait auparavant. Nous proposons également une adaptation du modèle classique de la Magic Line.

La modélisation de la phase aérienne (Section 7, p. 193) consiste à assimiler la trajectoire de l'avion à un arrondi circulaire et une montée rectiligne. C'est une modélisation couramment utilisée dans la littérature. L'innovation que nous apportons est de proposer un modèle du facteur de charge à l'arrondi n_z et de la pente de montée γ_{dec} , qui sont nécessaire à la mise en œuvre du modèle aérien. Non seulement de tels modèles n'existaient pas jusqu'à présent, mais nous montrons également que les constantes proposées dans la littérature peuvent entraîner de mauvaises prédictions.

La mise en œuvre des modèles de longueur de piste au décollage nécessite la connaissance des vitesses au décollage qui ne sont pas forcément connus au stade avant-projet. C'est pourquoi nous avons également élaboré des modèles de ces vitesses (Appendix 2, p. 29) : vitesse de décision V_1 , vitesse de rotation V_R , vitesse de décollage 'lift-off'' V_{LOF} avec ou sans panne moteur, vitesse de sécurité au décollage V_2 .

Les modèles analytiques de décollage que nous proposons sont validés par rapport à des simulations numériques complètes du décollage. Ils sont fonction des paramètres avion permettant d'envisager l'étude conceptuelle de performances au décollage pour une approche de type avant-projet. Leur estimation se fait avec une précision remarquable de moins d'un pour-cent par rapport aux simulations numériques.

Table des matières

Ι	$\mathbf{D}\epsilon$	éfinitio	on du décollage/atterrissage	11
1	Déf	inition	de la longueur de piste	15
	1.1	Distan	ce de décollage/atterrissage L_p au passage de la hauteur de sécurité	
				16
	1.2		fférentes phases au décollage/atterrissage	16
		1.2.1	Décollage sans panne moteur (AEO All Engine Operating)	18
		1.2.2	Décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative)	19
		1.2.3	Décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off)	21
		1.2.4	Atterrissage	22
		1.2.5	Récapitulatif des caractéristiques des phases de roulage	23
	1.3	Longu	eur de piste réglementaire $L_{p_{\mathrm{FAR}}}$	24
		1.3.1	Décollage sur piste sèche ou mouillée	24
		1.3.2	Décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off)	25
	1.4	Quelle	s pistes d'aéroports l'avion pourra-t-il utiliser?	27
2	Déf	inition	s des vitesses	29
	2.1	Récap	itulatif des encadrements imposés par la norme FAR 25	32
	2.2	Valeur	s opérationnelles des vitesses au décollage	32
		2.2.1	Vitesse de décrochage V_S	33
		2.2.2	Vitesse "minimum unstick" V_{mu}	36
		2.2.3	Vitesse minimale de contrôle V_{MC}	45
		2.2.4	Vitesse critique de panne moteur au décollage V_{EF}	47
		2.2.5	Vitesse de décision V_1	48
		2.2.6	Vitesse de rotation V_R	50
		2.2.7	Vitesse de décollage ou lift-off V_{LOF}	50
		2.2.8	Vitesse de tangage q à la rotation et l'arrondi au décollage	52
		2.2.9	Vitesse de sécurité au décollage V_2	56
		2.2.10	Assiette de montée au décollage θ_2	60
		2.2.11	Vitesse finale au décollage V_{FTO}	63
		2.2.12	Hauteur de sécurité h_s	63
			Pente minimale γ_{mini}	63
		2.2.14	Vitesse d'approche à l'atterrissage V_{REF}	65
			Vitesse de toucher des roues "touchdown" à l'atterrissage V_{TD}	65
3	Mo		ion des équations du décollage	67
	3.1	Modél	isation des efforts appliqués à l'avion	68
		3.1.1	La poussée des moteurs	68
		3.1.2	La portance et la traînée	69

	3.2 3.3	,	Le Poids	70 70 71 75
II	É	labora	ation d'un modèle de longueur de piste	7 9
4	Mo	dèle de	e référence numérique	83
	4.1	Métho	de numérique	84
		4.1.1	Résolution par la méthode d'Euler	84
		4.1.2	Recherche des décollages optimaux	86
	4.2		d'avions simulés	87
		4.2.1	Simulations de bimoteurs	87
	4.0	4.2.2	Simulations de quadrimoteurs	88
	4.3		tion du modèle numérique de décollage sur un Airbus en tenant e de l'effet de sol	92
5		dèles i ollage	dentifiés des vitesses de décision V_1 , de rotation V_R , et de V_{LOF}	e 93
	5.1		e du rapport des vitesses de décision et de rotation $\frac{V_1}{V_R}$	
	0.1	5.1.1	Modèle adapté aux bimoteurs	94
		5.1.2	Modèle adapté aux quadrimoteurs	
	5.2	Modèl	e du rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$	98
		5.2.1	Modèle adapté aux bimoteurs	101
		5.2.2	Modèle adapté aux quadrimoteurs	
	5.3		e du rapport des vitesses de décollage et de décrochage $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$	
		5.3.1	Modèle adapté aux bimoteurs	
		5.3.2	Modèle adapté aux quadrimoteurs	109
6	Le	roulage		113
	6.1		pelle-t-on phase de roulage?	
	6.2		isation du roulage	
	6.3		du roulage : mode d'emploi	
		6.3.1	Il faut scinder le roulage	
		6.3.2	Décollage avec tous moteurs (All Engines Operating AEO) : Décollage avec panne moteur (One Engine Inoperative OEI) :	
		6.3.3 $6.3.4$	Décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO):	
		6.3.5	L'atterrissage	
	6.4		ation analytique cinétique : ΔX et Δt	100
	0.1		ction de la vitesse V , pour un coefficient de frottement $\mu = cte$	131
		6.4.1	•	
		6.4.2	Distance de roulage ΔX	
		6.4.3	Conclusion : résolution cinétique du roulage	
	6.5		ntion analytique temporelle : V et ΔX	
			ction du temps t , pour un coefficient de frottement $\mu=cte$	
		6.5.1	Vitesse de l'avion V	
		6.5.2	Distance de roulage ΔX	
		6.5.3	Conclusion : Résolution temporelle du roulage	138

	6.6		moyenne du coefficient de frottement pneu/piste à considérer pour	
		les mo	dèles à $\mu = cte$	
		6.6.1	Décollage : roulage en roue libre	
		6.6.2	Atterrissage: freinage	
	6.7	Résolu	tion avec un modèle du coefficient de frottement pneu/piste fonction	
		de la v	ritesse $\mu(V)$. 143
		6.7.1	Méthode de résolution pour un coefficient μ fonction de la vitesse	. 143
		6.7.2	Quelle valeur du coefficient de recalage k_{Γ} choisir?	. 145
		6.7.3	Robustesse du modèle recalé en accélération	. 147
		6.7.4	Conclusion : Modèle recalé en accélération	
	6.8	La rot	ation	. 150
		6.8.1	Modèle simple de la rotation	
		6.8.2	Extension de notre résolution cinétique à la rotation	
	6.9	Roulag	ge avec du vent longitudinal constant $V_w = cte$	
		6.9.1	Expression analytique de l'accélération avion	. 157
		6.9.2	Adaptation de la résolution cinétique	
		6.9.3	Adaptation de la résolution temporelle	. 159
	6.10	Applie	ation des modèles de roulage	. 165
		6.10.1	Application numérique à l'A300	. 165
		6.10.2	Effet des becs et volets sur le roulage	. 172
			Incidence optimale de roulage α_r	
			Adaptation de la "Magic Line"	
	6.11	Conclu	sion : Modèle de longueur de piste et temps de roulage	. 191
7	Lar	ohase a	nérienne	193
	7.1		ions du modèle d'arrondi circulaire et montée rectiligne	
		7.1.1	Caractéristique de l'arc de cercle modélisant l'arrondi?	
		7.1.2	Longueur de piste parcourue durant la phase aérienne $L_{p_{ m air}}$	
		7.1.3	Modèle de la phase aérienne : arrondi circulaire et montée rectilign	
	7.2		fication de la pente γ_{dec} et du facteur de charge n_z	
		7.2.1	Valeurs préconisées dans la littérature	
		7.2.2	Détermination des n_z et γ_{dec} optimaux pour chaque simulation .	
		7.2.3	Modèles identifiés de n_z et γ_{dec}	
	7.3	Comm	entaires et résultats du modèle de la phase aérienne	
		7.3.1	Confrontation du modèle de phase aérienne et des simulations	
		7.3.2	Faiblesse des modèles existants à n_z fixé et γ_{dec} calculée à l'équilib	
		7.3.3	Explication physique de l'évolution des paramètres	
Q	Con	alusio	a : modèle analytique de la longueur de piste	231
G	8.1		e de la longueur de piste effective L_p	
	0.1	Moder	e de la longueur de piste enective L_p	. 202
тт	т т			0.41
II	1 1	es an	nexes	241
\mathbf{A}	Pré	cision	sur le roulage	243
	A.1	En pra	atique : Quel roulage pour décoller/atterrir?	
		A.1.1	Analyse de la modélisation de l'accélération Γ	
		A.1.2	Signe du discriminant Δ	
	A.2	Démor	nstration de la résolution temporelle	
		A.2.1	Vitesse au roulage V	. 255

		A.2.2 Distance de roulage ΔX	256
		A.2.3 Conclusion : résolution temporelle	
	A.3	Cohérence entre les résolutions temporelle et cinétique	
	A.4	Application numérique à l'A300	
	A.5	Modèles du coefficient de frottement pneu/piste μ	
		A.5.1 Modèles existants du coefficients de frottement pneu/piste A.5.2 Confrontation des modèles existants et élaboration d'un modèle à	
		partir de celui d'A.Lausetti	
	A.6	Modèle simple à accélération moyenne du roulage	
		du roulage	
		A.6.2 Quelle accélération moyenne considérer?	
		A.6.3 Conclusion : modèle simple du roulage à accélération constante	297
В	Pré	cision sur la phase aérienne	299
	B.1	Pente d'équilibre $\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)$ lors que l'assiette de montée θ_2 est imposée	300
	B.2	Critère de rentrée du train d'atterrissage	
	B.3	Confrontation des modèles de longueur de piste aérienne	303
\mathbf{C}	Mét	hode d'identification	309
	C.1	Qu'est-ce qu'un modèle identifié?	310
	C.2	Outils d'identification	310
		C.2.1 La fonction "lsqnonlin" de Matlab	
		C.2.2 Importance des valeurs initiales d'optimisation	311
	C.3	Méthode d'identification	312
D	Con	npléments mathématiques	315
	D.1	Relation th ⁻¹ $(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	316
		Relation th ⁻¹ (x) = $-i \tan^{-1}(ix) \dots \dots \dots \dots$	
	D.3	Résolution de $\int \frac{dV}{AV^2 + BV + C}$	317
		D.3.1 Cas du discriminant $\Delta > 0$	
		D.3.2 Cas du discriminant $\Delta < 0$	
		D.3.3 Cas du discriminant $\Delta = 0$	
	D.4	Résolution de $\int \frac{V dV}{A V^2 + B V + C} \dots$	
	D.5	Résolution : équation différentielle $\frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C$	
E	Dor	nées de longueurs et d'altitudes de pistes d'aéroports	331
P	Bibli	ographie	345

Première partie

Définition du décollage/atterrissage

Pour élaborer des modèles de décollage/atterrissage, ce qui est le but de cette étude, encore faut-il bien définir en quoi consiste exactement un décollage/atterrissage. C'est l'objet de cette première partie. En nous basant sur la norme avion FAR 25 relative aux avions de transport civil, et sur les informations recueillies¹ auprès des ingénieurs Airbus, de pilote et ingénieur d'essais, de pilote AirFrance, nous donnerons la définition de la longueur de piste et des vitesses caractéristiques au décollage. Nous établirons également les équations qui régissent un avion au décollage par le principe fondamental de la dynamique. Ceci permettra d'aboutir à une base de travail à partir de laquelle nous élaborerons nos modèles dans la deuxième partie de ce document.

¹Un grand merci à cette occasion à messieurs Frédéric Marani [Mar05], Jacques Rosay [Ros05] et Guy Bousquet [Bou04], et Jean-Yves Boiffier [Boi05], pour leur précieuse aide.

Chapitre 1

Définition de la longueur de piste

Sommaire

1.1 Dis	stance de décollage/atterrissage L_p au passage de la hau-	
ter	r de sécurité h_s	16
1.2 Les	s différentes phases au décollage/atterrissage	16
1.2.1	Décollage sans panne moteur (AEO All Engine Operating) .	18
1.2.2	Décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative) .	19
1.2.3	Décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off)	21
1.2.4	Atterrissage	22
1.2.5	Récapitulatif des caractéristiques des phases de roulage	23
1.3 Lo	ngueur de piste réglementaire $L_{p_{\text{FAR 25}}}$	24
1.3.1	Décollage sur piste sèche ou mouillée	24
1.3.2	Décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off)	25
1.4 Qu	elles pistes d'aéroports l'avion pourra-t-il utiliser?	27

L'objet de ce document étant de modéliser la longueur de piste nécessaire pour faire décoller ou atterrir un avion, ce premier chapitre a pour but préciser la définition de la longueur de piste.

Nous commencerons par définir la distance de décollage/atterrissage jusqu'au passage de la hauteur de sécurité h_s .

Puis, nous détaillerons chacune des phases du décollage et de l'atterrissage pour les quatres cas d'études qui serviront au dimensionnement de l'avion, à savoir : le décollage sans panne moteur $L_{p_{AEO}}$, le décollage avec panne moteur $L_{p_{OEI}}$, le décollage interrompu $L_{p_{RTO}}$, et l'atterrissage $L_{p_{Att}}$.

Nous exposerons ensuite la définition de la longueur de piste réglementaire. La norme FAR 25 relative aux avions de transport civil, prévoit une marge de sécurité par rapport à ces distances de décollage/atterrissage, pour définir la longueur de piste réglementaire $L_{p_{\rm FAR}}$ 25, qui sert de référence pour la certification des avions et l'étude de performances.

Pour finir, à partir de cette longueur de piste réglementaire, nous pourrons faire le rapprochement avec les longueurs des pistes goudronnées des aéroports, pour déterminer si un avion est susceptible d'emprunter telle ou telle piste existante.

1.1 Distance de décollage/atterrissage L_p au passage de la hauteur de sécurité h_s

Au décollage, l'avion qui est à l'arrêt en début de piste, accélère, roule sur la piste puis prend son envol, et s'élève au dessus de la piste à une hauteur h_s dite "hauteur de sécurité" (Section 2.2.12, p. 63). L'avion continue ensuite son ascension mais le décompte de la distance nécessaire pour décoller s'arrête au passage de la hauteur de sécurité $(h_s = 30\,ft$ ou 15ft si l'avion décolle sur piste mouillée avec une panne moteur). Cette distance de décollage sera notée L_{PAEO} pour un décollage sans panne moteur. En cas de panne d'un des moteurs, la panne apparaissant au moment le plus critique est celle qui nécessite autant de longueur de piste pour continuer le décollage jusqu'au passage de la hauteur de sécurité, que de longueur de piste pour interrompre le décollage en freinant jusqu'à l'arrêt complet de l'avion en bout de piste. La distance de décollage avec panne moteur, notée L_{POEI} , est alors égale à la distance du décollage interrompu L_{PRTO} .

Pour l'atterrissage, l'avion en approche, passe au dessus de la hauteur de sécurité $(h_s = 50ft)$ à partir de laquelle la distance d'atterrissage est comptabilisée jusqu'à l'arrêt de l'avion en bout de piste. La distance d'atterrissage est notée L_{pAtt} .

1.2 Les différentes phases au décollage/atterrissage

Le décollage et l'atterrissage sont composés d'une phase de roulage où l'avion est en contact avec la piste, et d'une phase aérienne délimitée par la vitesse de lift-off V_{LOF} au décollage (ou la vitesse de toucher des roues V_{TD} pour l'atterrissage) et par le passage de la hauteur de sécurité h_s (Section 2.2.12, p. 63). La longueur de piste parcourue durant la phase de roulage est notée L_{p_T} , et la projection selon la piste de la distance parcourue durant la phase aérienne est notée $L_{p_{\rm air}}$.

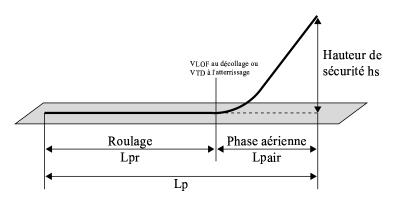


Fig. 1.1 – La distance L_p de décollage/atterrissage au passage de la hauteur de sécurité h_s , est composée d'une phase de roulage de longueur L_{p_r} et d'une phase aérienne de longueur $L_{p_{air}}$.

$$L_p = L_{p_r} + L_{p_{air}}$$

Au décollage, le roulage commence en début de piste (Vitesse par rapport au sol V = 0) jusqu'à ce que l'avion atteigne la vitesse de décollage "lift-off" V_{LOF} où il quitte complètement la piste (Section 2.2.7, p. 50). La phase aérienne est comprise entre V_{LOF}

et le passage de la hauteur de sécurité $h_s = 35 ft$ (ou 15ft en cas de panne moteur sur piste mouillée).

À l'atterrissage, l'avion en approche a une vitesse V_{REF} (Section 2.2.14, p. 65). La phase aérienne de l'atterrissage commence lorsque l'avion passe la hauteur de sécurité $h_s = 50 ft$, et se termine lorsque les roues de l'avion touchent la piste à la vitesse "touch down" V_{TD} (Section 2.2.15, p. 65). L'avion effectue ensuite un roulage de V_{TD} jusqu'à l'arrêt complet de l'avion (V = 0) en bout de piste.

La phase de roulage peut elle même être scindée en deux phases distinctes : l'une où l'avion a toutes roues en contact avec le sol, et l'autre dite de "rotation" où l'avion pivote autour du train principal qui touche encore la piste alors que la roulette de nez n'est pas en contact avec la piste. La longueur de piste parcourue durant la rotation sera notée $L_{p_T \cap \cdot}$.

La phase aérienne peut également être scindée en deux phases : un arrondi qui représente la partie de trajectoire courbe et une montée/descente rectiligne. Il se peut que la phase de montée rectiligne soit occultée si l'avion passe la hauteur de sécurité h_s pendant l'arrondi, c'est le cas de la plupart des décollages (sans panne moteur). La distance piste parcourue durant l'arrondi est notée L_{par} , et durant la montée rectiligne est notée L_{p} .

Takeoff segments & nomenclature Takeoff flight path ctual height ≥ 1500ft 1500ft Actual height Takeoff distance ≥ 400ft longer of 1 eng. inop. takeoff path or 1.15 all eng. takeoff) Actual heights are Gear retraction referenced to runway complete elevation at end of 35ft takeoff distance Segment Ground roll Acceleration 1st Landing gear Retracted Down Retraction Flaps En route position Retracting (see note) Takeoff Maximum continous Power Takeoff of 25.11(c)(3) can be met with less than takeoff thrust (see note Airspeed ≥ 1.18 V_{SR} Accelerating Accelerating Engines All operating One inoperative

FIG. 1.2 – AC25-7A ([FAA98] chap2.sec2 Performances). Définition des segments et configuration du train, des hypersustentateurs, de la poussée,...

One feathered

400ft or greater

One autofeathered or windmilling

up to 400ft

Propeller

Takeoff

V_{R} $V_{LOF_{AEO}}$ V_{L

1.2.1 Décollage sans panne moteur (AEO All Engine Operating)

Fig. 1.3 – Décollage sans panne moteur (AEO : All Engines Operating)

Le décollage sans panne moteur (AEO All Engine Operating) est le cas de décollage le plus fréquent. Tous les moteurs fonctionnent et délivrent une poussée totale F_{max} . L'avion est en configuration bec/volet de décollage. Aucun changement de poussée ou de configuration de becs et volets ne devra être actionné par le pilote avant que l'avion n'est atteint 400ft (cf.FAR 25.111.c.4). Par conséquent, jusqu'au passage de la hauteur de sécurité h_s , l'avion est dans la même configuration d'hypersustentateurs et de poussée.

Le roulage

L'avion est au point d'arrêt en début de piste (V=0). Il se met à accélérer et atteint la vitesse de rotation V_R (Section 2.2.6, p. 50). À ce moment là, la distance parcourue sur la piste est de $L_{p_{rAEO}}(0 \to V_R)$. Durant cette première partie de la phase de roulage, toutes les roues restent toujours en contact avec la piste, et l'incidence de roulage α_r reste constante (donnée par la géométrie de l'avion). Le coefficient de frottement est celui en roue libre, c'est-à-dire μ_r .

Commence ensuite la rotation. À la vitesse de rotation V_R , le pilote tire sur le manche δ_m et la roulette de nez quitte le sol. L'avion pivote autour de son train principal, augmentant progressivement son assiette θ et son incidence α . La phase de rotation et ainsi le roulage, prennent fin lorsque l'avion, qui continue d'accélérer, atteint la vitesse de décollage "lift-off" V_{LOF} (Section 2.2.7, p. 50) où il quitte totalement la piste, est entièrement sustenté. La longueur de piste parcourue durant la rotation est de $L_{p_T \circlearrowleft AEO}$.

La longueur de piste du roulage L_{p_r} est donc donnée par la somme :

$$L_{p_{rAEO}} = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_R) + L_{p_{r} \circlearrowleft AEO}$$

La phase aérienne

À la vitesse de décollage "lift-off" V_{LOF} commence la phase aérienne jusqu'au passage de la hauteur de sécurité h_s . L'avion doit atteindre la vitesse de sécurité au décollage V_2 (Section 2.2.9, p. 56) avant de passer h_s . Durant cette phase aérienne, le pilote commande

18 décembre 2006

la rentrée du train dès que le vario est positif, mais celui-ci n'est pas encore rentré quand l'avion passe h_s (Section B.2, p. 302).

Pour un décollage sans panne moteur, le passage de la hauteur de sécurité se fait pendant l'arrondi ce qui fait qu'il n'y a généralement pas de phase de montée rectiligne avant le passage de la hauteur de sécurité.

La longueur de piste par courue durant la phase aérienne (jusqu'au passage de $h_s)$ est notée $L_{p_{\rm air}}.$

REMARQUE 1.1 La phase aérienne et la rotation dépendent de la manière dont est piloté l'avion. Le pilote vise à atteindre une assiette de montée θ_2 (Remarque 2.7, p. 54) et cela se fait à vitesse de tangage q quasi-constante.

Longueur de piste AEO

La longueur de piste totale L_p , qui est la somme de la longueur de roulage L_{p_r} et de la longueur de la phase aérienne $L_{p_{\text{air}}}$, pour un décollage sans panne moteur, est finalement donnée par :

$$L_{p_{AEO}} = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_R) + L_{p_{r\circlearrowleft AEO}} + L_{p_{\text{air}AEO}}$$

1.2.2 Décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative)

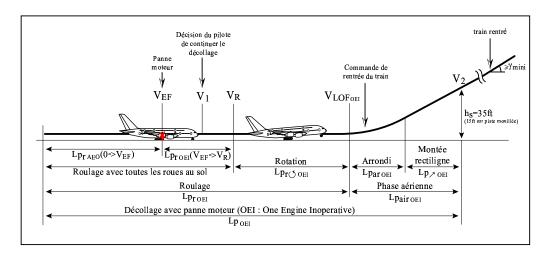


Fig. 1.4 – Décollage avec panne moteur (OEI : One Engine Inoperative)

Ce décollage consiste à réussir un décollage malgré une panne d'un des moteurs qui survient au moment le plus critique, c'est-à-dire au moment où il faudrait autant de longueur de piste pour continuer le décollage que pour l'interrompre.

Le roulage

L'avion à l'arrêt en début de piste, accélère à l'aide de tous ses moteurs délivrant une poussée totale de F_{max} , jusqu'à la vitesse V_{EF} (Engine Failure) où l'un des N_m moteurs tombe en panne. La distance parcourue sur la piste jusqu'à la panne moteur

est notée $L_{p_{r}AEO}(0 \rightarrow V_{EF})$. Le moteur en panne se met à tourner en "moulinet" créant une augmentation de la traînée de frottement de $\Delta Cx_{omoulinet}$. L'avion continue d'accélérer avec un moteur de moins, c'est-à-dire une poussée totale de $\frac{N_m-1}{N_m}F_{max}$. Le pilote s'aperçoit de la panne et décide de tout de même continuer le décollage. L'avion est à la vitesse de décision V_1 . L'accélération de l'avion continue et sa vitesse atteint la vitesse de rotation V_R . La distance parcourue durant cette accélération jusqu'à V_R avec un moteur en moins, est notée $L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \rightarrow V_R)$. Jusqu'à présent, le roulage s'était effectué avec toutes les roues en contact avec le sol, à incidence constante. À V_R , le pilote tire sur le manche et la roulette de nez quitte le sol. C'est la rotation. L'avion pivote selon son axe de tangage, son assiette et son incidence croissent. Le roulage se termine quand l'avion quitte complètement le sol à la vitesse de décollage "lift-off" V_{LOF} . La longueur de piste durant la rotation avec panne moteur est notée $L_{p_{r\circlearrowleft OOEI}}$. Le roulage de V=0 à V_{LOF} s'est fait avec les roues libres, avec un coefficient de frottement pneu/piste μ_r , et la distance de roulage est de :

$$L_{p_{rOEI}} = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \rightarrow V_{R}) + L_{p_{r} \cap OEI}$$

La phase aérienne

Avec une poussée $\frac{N_m-1}{N_m}F_{max}$ amoindrie par la panne moteur, l'avion sustenté depuis V_{LOF} , entame une trajectoire courbe quasi-circulaire, appelée arrondi. Cet arrondi se fait sous un facteur de charge n_z légèrement plus faible que pour le cas d'un décollage sans panne moteur. Puis l'avion effectue ensuite une montée rectiligne de pente γ_{dec} . La pente que l'avion peut atteindre dépend bien évidemment du taux de propulsion de l'avion, et donc en cas de panne moteur est plus faible.

Le pilote commande la rentrée du train (Section B.2, p. 302) dès que le vario est positif, mais le train n'a pas le temps de rentrer avant le passage de la hauteur de sécurité h_s . Il ne sera rentré qu'au cours du second segment. Au moins jusqu'à h_s , le coefficient de traînée de frottement sera augmenté par la sortie du train ΔCx_{oTrain} .

Un des moteurs étant toujours en panne, le coefficient de traînée de frottement sera également augmentée de $\Delta Cx_{omoulinet}.$

La norme FAR 25.111.c.4 impose de garder la même configuration des becs et des volets durant tout le décollage. Ne sachant pas à l'avance si un moteur va tomber en panne ou non durant le décollage, il faut que la configuration d'hypersustentateurs choisie convienne à la fois à un décollage avec panne et un décollage sans panne. C'est le cas de décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative) qui dimensionne la configuration d'hypersustentateur qui sera adoptée même pour les décollages sans panne.

La longueur de piste parcourue durant la phase aérienne du décollage avec panne moteur est notée par $L_{p_{\rm air}OEI}$.

Longueur de piste OEI

Ainsi, la longueur de piste totale L_p , qui est la somme de la longueur de roulage L_{p_r} et de la longueur de la phase aérienne $L_{p_{\rm air}}$, pour un décollage avec panne moteur, est finalement donnée par :

$$L_{pOEI} = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \rightarrow V_{R}) + L_{p_{r} \uparrow_{OEI}} + L_{p_{airOEI}}$$

1.2.3 Décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off)

Le décollage interrompu ou accélération-arrêt, est uniquement du roulage toute roues au sol, c'est-à-dire à incidence constante. Le pilote commence un décollage en accélérant, puis l'interrompt et arrête l'avion en bout de piste après avoir freiné. Le cas le plus critique est lorsque le décollage est interrompu à la vitesse de décision V_1 , comme nous allons le voir.

Décollage interrompu dû à une panne moteur

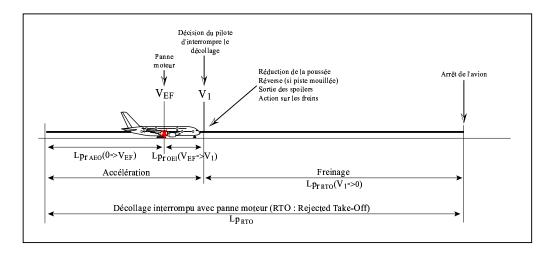


Fig. 1.5 – Décollage interrompu avec panne moteur (RTO: Rejected Take-Off)

Tout se passe comme pour un décollage avec panne moteur jusqu'à la vitesse de décision V_1 où le pilote décide d'interrompre le décollage au lieu de le continuer. L'avion part donc du point d'arrêt en début de piste et accélère à l'aide de tous ses moteurs jusqu'à la vitesse V_{EF} où l'un des moteurs tombe en panne. L'avion continue d'accélérer avec une poussée de $\frac{N_m-1}{N_m}F_{max}$, jusqu'à ce que le pilote prenne conscience de la panne moteur et n'agisse pour interrompre le décollage à V_1 . Jusqu'à V_1 , la distance parcourue sur la piste sera $L_{p_{rAEO}}(0 \to V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \to V_1)$. Les actions du pilote pour arrêter l'avion sont de freiner ce qui modifie la valeur du coefficient de frottement pneu/piste en μ_f (au lieu de μ_r en roue libre), de réduire la poussée par la manette des gaz $\frac{N_m-1}{N_m}F_{red}$, et sortir les spoilers qui crée une augmentation de traînée de frottement ΔCx_{oSP} et une perte de portance ΔCz_{oSP} . La réverse qui est utilisée opérationnellement, ne peut être utilisée pour la certification que pour un décollage interrompu sur piste mouillée.

De V_{EF} jusqu'à l'arrêt complet V=0 de l'avion en bout de piste, puisqu'un des moteurs est en panne et tourne en "moulinet", la traînée de frottement est augmentée de $\Delta Cx_{omoulinet}$.

En notant $L_{p_{rRTO}}(V_1 \to 0)$ la longueur de piste parcourue durant le freinage depuis la vitesse de décision jusqu'à l'arrêt de l'avion, la longueur de piste parcourue durant un décollage interrompu avec panne moteur est donnée par :

$$L_{p_{RTOpanne}} = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \rightarrow V_1) + L_{p_{rRTO}}(V_1 \rightarrow 0)$$

En pratique c'est le décollage interrompu avec panne moteur qui est le plus dimensionnant, car l'accélération entre V_{EF} et V_1 se fait plus difficilement lorsqu'un des moteurs

est en panne.

Décollage interrompu sans panne moteur

Tout se passe comme pour un décollage sans panne moteur jusqu'à la vitesse de décision V_1 où le pilote, pour une raison autre qu'une panne moteur, décide d'interrompre le décollage au lieu de le continuer. L'avion à l'arrêt en début de piste accélère avec tous ses moteurs jusqu'à la vitesse de décision V_1 . La longueur de piste parcourue durant cette accélération est de $L_{p_{rAEO}}(0 \to V_1)$. Puis le pilote freine (coefficient de frottement au freinage μ_f), réduit la poussée (poussée F_{red}) et sort les spoilers (augmentation de traînée de frottement ΔCx_{oSP} et perte de portance ΔCz_{oSP}) pour arrêter l'avion. Durant cette phase de freinage, la longueur de piste parcourue est de $L_{p_{rRTO}}(V_1 \to 0)$. La longueur de piste parcourue au total durant cette accélération-arrêt est de :

$$L_{p_{RTO\,sans\,panne}} = L_{p_{rAEO}}(0 \to V_1) + L_{p_{rRTO}}(V_1 \to 0)$$

1.2.4 Atterrissage

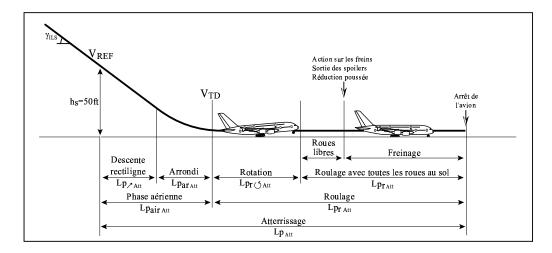


Fig. 1.6 – Atterrissage

L'atterrissage est composée d'une phase aérienne suivie d'une phase de roulage. L'avion qui est en configuration d'atterrissage (hypersustentateurs déployés), est en approche à une vitesse V_{REF} , avec une pente de descente donnée par l'ILS : $\gamma_{ILS} = -3^{\circ}$. La poussée de l'avion n'est pas maximale, et est choisie pour pouvoir effectuer cette approche de descente rectiligne. Le pilote fait pivoter son avion de manière à effectuer un arrondi sous facteur de charge n_z et toucher la piste à la vitesse V_{TD} . La distance de la phase aérienne $L_{p_{\text{air}}Att}$ est comptabilisée entre le point où l'avion passe à $h_s = 35ft$ de hauteur, et le point où le train d'atterrissage principal touche le sol à la vitesse V_{TD} . Puis, l'avion commence le roulage, par effectuer une rotation de manière à poser sa roulette de nez au sol. Cette manœuvre nécessite une longueur de piste de rotation de $L_{p_{r\circlearrowleft Att}}$. Une fois toutes les roues au sol, il se peut que le pilote mette un laps de temps avant de freiner, ce qui fait que l'avion roulera en roue libre (coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r). Le pilote freine, réduit la poussée pour arrêter l'avion. L'avion effectue donc un roulage en freinage (coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f) à

poussée réduite F_{red} (la réverse qui est autorisée opérationnellement, ne l'est pas pour la certification). La longueur de piste parcourue durant cette phase de roulage avec toutes les roues au sol, est notée L_{p_rAtt} .

La longueur de piste à l'atterrissage est la somme des longueurs aérienne et de roulage :

$$L_{p_{Att}} = L_{p_{\text{air}}Att} + L_{p_{r\circlearrowleft Att}} + L_{p_{rAtt}}$$

1.2.5 Récapitulatif des caractéristiques des phases de roulage

Décomposition en phases de caractéristiques distinctes du décollage/atterrissage

Décollage sans panne moteur (AEO All Engines Operating)

$$L_{p_{AEO}} = L_{p_{rAEO}}(0 \to V_R) + L_{p_{r\circlearrowleft AEO}} + L_{p_{\text{air}}}$$

Décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative)

$$L_{POEI} = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \rightarrow V_{R}) + L_{p_{r\circlearrowleft OEI}} + L_{p_{\text{air}}}$$

Décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off)

$$L_{p_{RTO}} = L_{p_{rAEO}}(0 \to V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \to V_1) + L_{p_{rRTO}}(V_1 \to 0)$$
Attantique go

$$L_{p_{Att}} = L_{p_{\text{air}}} + L_{p_{r\circlearrowleft Att}} + L_{p_{rAtt}}$$

Pour calculer :	considérez (Table 8.1, p. 234) avec :
$L_{p_{rAEO}}$	$F_{ref} = F_0,$ $\Delta Cx_{omoulinet} = 0, \Delta Cx_{oSP} = 0, \Delta Cz_{oSP} = 0, \mu = \mu_r$
$L_{p_{rOEI}}$	$F_{ref} = \frac{N_m - 1}{N_m} F_0, \qquad \Delta C x_{oSP} = 0, \ \Delta C z_{oSP} = 0, \ \mu = \mu_r$
$L_{p_{rRTO}}$	$F_{ref} = \frac{N_m - 1}{N_m} F_{red}, \qquad \mu = \mu_f$
$L_{p_{r\circlearrowleft Att}}$	$F_{ref} = F_{red},$ $\Delta Cx_{omoulinet} = 0, \Delta Cx_{oSP} = 0, \Delta Cz_{oSP} = 0, \mu = \mu_r$
$L_{p_{rAtt}}$	$F_{ref} = F_{red}, \qquad \Delta Cx_{omoulinet} = 0, \qquad \mu = \mu_f$

À partir de ces distances de décollage et d'atterrissage ainsi calculées au passage de la hauteur de sécurité, la norme avion FAR 25 définit, avec des marges de sécurité, une longueur de piste réglementaire $L_{p_{\rm FAR}}$ sur piste sèche et sur piste mouillée, qui serviront à la certification de l'avion et à déterminer si celui-ci pourra emprunter tel ou tel aéroport. La définition de la longueur de piste réglementaire fait l'objet du paragraphe suivant.

1.3 Longueur de piste réglementaire $L_{p_{\text{FAR 25}}}$

La norme avion FAR 25 définit une longueur de piste réglementaire $L_{p_{\rm FAR}~25}$ de décollage ou décollage interrompu, sur piste sèche et sur piste mouillée, en prenant des marges de sécurité par rapport aux distances de décollage au passage de la hauteur de sécurité ($L_{p_{AEO}},\,L_{p_{OEI}}$ et $L_{p_{RTO}}$).

1.3.1 Décollage sur piste sèche ou mouillée

La FAR 25 définit la longueur de piste réglementaire d'un décollage $L_{p_{\rm FAR}~25}$ en fonction des distances de décollage avec panne moteur $L_{p_{OEI}}$ ou sans panne moteur $L_{p_{AEO}}$. Par exemple, la longueur de piste réglementaire d'un décollage sur piste sèche considère une marge de 15% supplémentaire par rapport au calcul de la distance de décollage sans panne moteur $L_{p_{AEO}}$ (AEO : All Engines Operating).

"FAR 25.113 : Takeoff distance and takeoff run :

- (a) [Takeoff distance on a dry runway is the greater of-
 - (1) The horizontal distance along the takeoff path from the start of the takeoff to the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface, determined under Sec. 25.111 for a dry runway; or]
 - (2) 115 percent of the horizontal distance along the takeoff path, with all engines operating, from the start of the takeoff to the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface, as determined by a procedure consistent with Sec. 25.111.
- (b) [Takeoff distance on a wet runway is the greater of-
 - (1) The takeoff distance on a dry runway determined in accordance with paragraph (a) of this section; or
 - (2) The horizontal distance along the takeoff path from the start of the takeoff to the point at which the airplane is 15 feet above the takeoff surface, achieved in a manner consistent with the achievement of V₂ before reaching 35 feet above the takeoff surface, determined under Sec. 25.111 for a wet runway.
- (c) ...

Amdt. 25-92, Eff. 3/20/98"

- FAR 25.113 : Takeoff distance and takeoff run [FAA03] -

La longueur de piste réglementaire au décollage sur piste sèche $L_{p_{\mathrm{FAR}},25,dry}$ est définie par la norme FAR 25 comme la valeur maximale entre les distances de décollage sur piste sèche au passage de $h_s=35ft$, avec panne moteur $L_{p_{OEI}}$ et 1.15 fois celle sans panne moteur $L_{p_{AEO}}$:

$$L_{p_{\text{FAR }25,dry}} = \max\left(L_{p_{OEI}}, \ 1.15 L_{p_{AEO}}\right)$$

La longueur de piste réglementaire au décollage sur piste mouillée $L_{p_{\rm FAR}\ 25,wet}$ est définie par la valeur maximale entre la longueur de piste réglementaire au décollage sur piste sèche $L_{p_{\rm FAR}\ 25,dry}$ et la distance $L_{p_{\rm OEIwet,h_s=15ft}}$ de décollage au passage de la hauteur de sécurité de $h_s=15ft$ (au lieu de 35ft), sur piste mouillée, avec panne moteur :

$$L_{p_{\mathrm{FAR}\ 25,wet}} = \max\left(L_{p_{\mathrm{FAR}\ 25,dry}}\,,\; L_{p_{OEI_{wet},h_s=15ft}}\right)$$

REMARQUE 1.2 Sur piste sèche, la longueur de piste au décollage d'un bimoteur avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative) est plus grande que 1.15 fois la longueur de piste d'un décollage sans panne moteur (AEO All Engines Operating). Le cas de panne moteur est dimensionnant pour le décollage des bimoteurs.

Pour les quadrimoteurs, ces longueurs sont du même ordre.

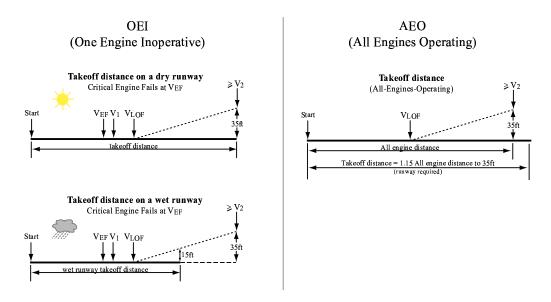


FIG. 1.7 - AC25-7A ([FAA98] chap.2, sec.2 Performances): Takeoff distance and Takeoff run

REMARQUE 1.3 Pour un même avion, augmenter sa masse au décollage M_{TOW} , a pour conséquence de rendre la longueur de piste avec panne moteur (OEI), encore plus importante que 1.15 fois celle sans panne moteur (AEO).

1.3.2 Décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off)

Le décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off), consiste à accélérer l'avion jusqu'à la vitesse de décision V_1 (Section 2.2.5, p. 48), vitesse à laquelle le pilote prend la première mesure pour interrompre le décollage, et freiner l'avion jusqu'à l'arrêt complet.

Là encore, la norme avion, FAR 25.109, prévoit une marge de sécurité supplémentaire, correspondant à la distance que parcourrait l'avion durant 2 secondes à la vitesse V_1 . Avec la vitesse de décision V_1 exprimée en m/s, cette marge de sécurité supplémentaire revient à $2V_1$.

La longueur de piste réglementaire d'un décollage interrompu sur piste sèche $L_{pRTO\,\mathrm{FAR}\ 25,dry}$ est définie par la norme FAR 25, comme la distance maximale entre un décollage interrompu avec panne moteur L_{pRTO} (avec panne) et un décollage interrompu sans panne moteur L_{pRTO} (sans panne), majorée d'une distance supplémentaire de sécurité de 2 V_1 (avec V_1 en m/s):

$$L_{p_{RTO} \text{FAR 25}, dry} = \max \left(L_{p_{RTO}} (\text{avec panne}), L_{p_{RTO}} (\text{sans panne}) \right) + 2 V_1$$

La longueur de piste réglementaire d'un décollage interrompu sur piste mouillée $L_{pRTOFAR\ 25,wet}$ est définie comme le maximum entre la longueur de piste réglementaire sur piste sèche $L_{pRTOFAR\ 25,dry}$ et distance de décollage interrompu calculée sur piste mouillée $L_{pRTOmet}$:

$$L_{p_{RTOwet}} = \max \left(L_{p_{RTOwet}} (\text{avec panne à } V_{EFwet}), L_{p_{RTOwet}} (\text{sans panne}) \right) + 2 V_{1wet}$$

$$L_{p_{RTO\text{FAR }25,wet}} = \max\left(L_{p_{RTO\text{FAR }25,dry}},\ L_{p_{RTOwet}}\right)$$

Accelerate-stop speed vs. distance

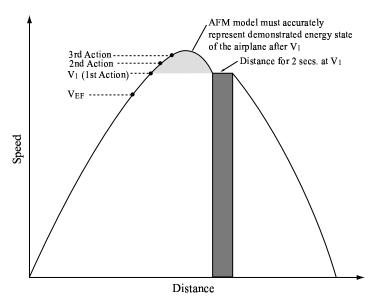


FIG. 1.8 – Graphique proposé par le guide des essais en vol AC25-7A ([FAA98] chap2.sec2 Performances), représentant l'évolution de la vitesse selon la distance parcourue pour un décollage interrompu (RTO : Rejected Take-Off). On remarquera la distance supplémentaire de sécurité correspondant à une vitesse V_1 maintenue durant 2 secondes.

"FAR 25.109 : Accelerate-stop distance.

- $\textbf{(a)} \ \ [\textit{The accelerate-stop distance on a dry runway is the greater of the following distances}:$
 - (1) The sum of the distances necessary to-
 - (i) Accelerate the airplane from a standing start with all engines operating to V_{EF} for takeoff from a dry runway;
 - (ii) Allow the airplane to accelerate from V_{EF} to the highest speed reached during the rejected takeoff, assuming the critical engine fails at V_{EF} and the pilot takes the first action to reject the takeoff at the V₁ for takeoff from a dry runway; and
 - (iii) Come to a full stop on a dry runway from the speed reached as prescribed in paragraph (a)(1)(ii) of this section; plus
 - (iv) A distance equivalent to 2 seconds at the V_1 for takeoff from a dry runway.
 - (2) The sum of the distances necessary to-
 - (i) Accelerate the airplane from a standing start with all engines operating to the highest speed reached during the rejected takeoff, assuming the pilot takes the first action to reject the takeoff at the V_1 for takeoff from a dry runway; and
 - (ii) With all engines still operating, come to a full stop on dry runway from the speed reached as prescribed in paragraph (a)(2)(i) of this section; plus
 - (iii) A distance equivalent to 2 seconds at the V_1 for takeoff from a dry runway.
- $\textbf{(b)} \ \ \textit{The accelerate-stop distance on a wet runway is the greater of the following distances:}$
 - (1) The accelerate-stop distance on a dry runway determined in accordance with paragraph (a) of this section; or
 - (2) The accelerate-stop distance determined in accordance with paragraph (a) of this section, except that the runway is wet and the corresponding wet runway values of V_{EF} and V₁ are used. In determining the wet runway accelerate-stop distance, the stopping force from the wheel brakes may never exceed:

- (i) The wheel brakes stopping force determined in meeting the requirements of Sec. 25.101(i) and paragraph (a) of this section; and
- (ii) The force resulting from the wet runway braking coefficient of friction determined in accordance with paragraphs (c) or (d) of this section, as applicable, taking into account the distribution of the normal load between braked and unbraked wheels at the most adverse center-of-gravity position approved for takeoff.

(c) ... Amdt. 25-92, Eff. 3/20/98 "

- FAR 25.109 : Accelerate-stop distance. [FAA03] -

"Although the requirement for the distance increment equivalent to two second at V_1 is explicitly stated in the "dry runway" criteria of FAR 25.109, it is also applied to the "wet runway" accelerate-stop distances by reference in FAR 25.109(b)."

- AC25-7A [FAA98] -

REMARQUE 1.4 En pratique, le décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off avec panne moteur est plus dimensionnant que la RTO sans panne.

Pour chaque avion, vont être calculées les longueurs de piste réglementaires $L_{p_{\rm FAR}~25}$ qui lui sont associées sur piste mouillée et piste sèche, et qui permettront de déterminer si l'avion serait susceptible ou non d'être autorisée à décoller/atterrir sur telle ou telle piste d'aéroport.

1.4 Quelles pistes d'aéroports l'avion pourra-t-il utiliser?

Les pistes des aéroports, généralement revêtues de béton ou de bitume, ont en moyenne une longueur d'environ 3km et une largeur de 50m. Vous trouverez en annexe les données de longueur des pistes d'aéroport, ainsi que leur altitude (Appendix E, p. 331).

Un avion certifié pour décoller avec une longueur de piste réglementaire $L_{p_{\text{FAR 25}}}$, peut décoller sur une piste d'aéroport de longueur goudronnée $L_{p_{\text{aéroport}}}$ supérieure à la longueur de piste réglementaire : $L_{p_{\text{aéroport}}} \geq L_{p_{\text{FAR 25}}}$.

L'avion peut également décoller sur des pistes d'aéroport moins longues à condition que la longueur de piste goudronnée $L_{p_{\text{aéroport}}}$ soit au moins aussi grande que la distance entre le point de départ du décollage et le point équidistant entre l'endroit où l'avion atteint V_{LOF} et l'endroit où l'avion passe la hauteur de sécurité h_s (Figure 1.9, p. 28). Il faut également qu'une surface aménagée en bout de piste, appelée "clearway", soit suffisamment grande pour que sa longueur ajoutée à la longueur de piste goudronnée soit au moins égale à la longueur de piste réglementaire de l'avion.

Pour être plus précis, selon le cas dimensionnant (avec ou sans panne moteur) de la longueur de piste réglementaire, la condition sur la longueur de piste goudronnée par rapport au point équidistant entre V_{LOF} et h_s diffère un petit peu.

$$\begin{array}{ll} L_{p_{\text{a\'eroport}}} & \geq & L_{p_{\text{FAR 25},dry}} - \frac{1}{2}L_{p_{\text{air}OEI}} \\ & \geq & L_{p_{\text{FAR 25},dry}} - \frac{1.15}{2}L_{p_{\text{air}AEO}} \\ & \geq & L_{p_{\text{FAR 25},wet,OEI},h_s=15ft} \\ & \geq & L_{p_{\text{FAR 25},wet}} - \frac{1.15}{2}L_{p_{\text{air}wet,AEO}} \end{array}$$

"

- (c) [If the takeoff distance does not include a clearway, the takeoff run is equal to the takeoff distance. If the takeoff distance includes a clearway—
 - (1) The takeoff run on a dry runway is the greater of-
 - (i) The horizontal distance along the takeoff path from the start of the takeoff to a point equidistant between the point at which V_{LOF} is reached and the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface, as determined under Sec. 25.111 for a dry runway; or
 - (ii) 115 percent of the horizontal distance along the takeoff path, with all engines operating, from the start of the takeoff to a point equidistant between the point at which V_{LOF} is reached and the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface, determined by a procedure consistent with Sec. 25.111.
 - (2) The takeoff run on a wet runway is the greater of-
 - (i) The horizontal distance along the takeoff path from the start of the takeoff to the point at which the airplane is 15 feet above the takeoff surface, achieved in a manner consistent with the achievement of V₂ before reaching 35 feet above the takeoff surface, as determined under Sec. 25.111 for a wet runway; or
 - (ii) 115 percent of the horizontal distance along the takeoff path, with all engines operating, from the start of the takeoff to a point equidistant between the point at which V_{LOF} is reached and the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface, determined by a procedure consistent with Sec. 25.111.]

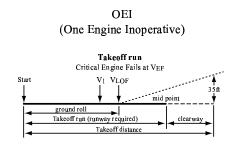
Amdt. 25-92, Eff. 3/20/98"

- FAR 25.113 : Takeoff distance and takeoff run [FAA03] -

"Clearway means:

- (1) For turbine engine powered airplanes certificated after August 29, 1959, an area beyond the runway, not less than 500 feet wide, centrally located about the extended centerline of the runway, and under the control of the airport authorities. The clearway is expressed in terms of a clearway plane, extending from the end of the runway with an upward slope not exceeding 1.25 percent, above which no object nor any terrain protrudes. However, threshold lights may protrude above the plane if their height above the end of the runway is 26 inches or less and if they are located to each side of the runway.
- (2) For turbine engine powered airplanes certificated after September 30, 1958, but before August 30, 1959, an area beyond the takeoff runway extending no less than 300 feet on either side of the extended centerline of the runway, at an elevation no higher than the elevation of the end of the runway, clear of all fixed obstacles, and under the control of the airport authorities.

- FAR 1.1 : General definitions -



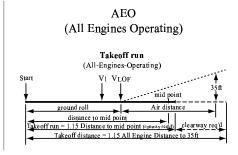


Fig. 1.9 - AC25-7A ([FAA98] chap.2, sec.2 Performances): Takeoff distance and Takeoff run

Chapitre 2

Définition des vitesses : Contraintes et valeurs opérationnelles

α			•		
So	m	m	21	r	_
L)U	,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,		α		₹.

11110	111 (,		
:	2.1	Réca	apitulatif des encadrements imposés par la norme FAR	
		25 .		32
2	2.2	Vale	urs opérationnelles des vitesses au décollage	32
		2.2.1	Vitesse de décrochage V_S	33
		2.2.2	Vitesse "minimum unstick" V_{mu}	36
			Limitation de l'assiette au décollage θ_{TS}	37
			Effet de sol	39
			Contribution de la poussée	41
			Conclusion : ordre de grandeur du rapport $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$	42
		2.2.3	Vitesse minimale de contrôle V_{MC}	45
		2.2.4	Vitesse critique de panne moteur au décollage V_{EF}	47
		2.2.5	Vitesse de décision V_1	48
		2.2.6	Vitesse de rotation V_R	50
		2.2.7	Vitesse de décollage ou lift-off V_{LOF}	50
		2.2.8	Vitesse de tangage q à la rotation et l'arrondi au décollage	52
		2.2.9	Vitesse de sécurité au décollage V_2	56
			Définition	56
			Encadrement opérationnel	56
			Calcul de la vitesse $V_{2\gamma_{mini}}$ de pente minimale de montée	57
		2.2.10	Assiette de montée au décollage θ_2	60
		2.2.11	Vitesse finale au décollage V_{FTO}	63
		2.2.12	Hauteur de sécurité h_s	63
		2.2.13	Pente minimale γ_{mini}	63
		2.2.14	Vitesse d'approche à l'atterrissage V_{REF}	65
		2.2.15	Vitesse de toucher des roues "touchdown" à l'atterrissage ${\cal V}_{TD}$	65

Ce chapitre a pour but de clarifier les différentes vitesses caractéristiques du décollage que nous utilisons pour l'étude de la longueur de piste. La définition de ces vitesses est donnée par la norme FAR 1 (Definitions and abbreviations) dont nous avons répertoriées les principales :

 V_{EF} : Speed at which the critical engine is assumed to fail during the takeoff

 V_{FTO} : Final takeoff speed

 V_{LOF} : Lift-off speed

 V_{MC} : Minimum control speed with the critical engine inoperative

 V_{mu} : Minimum unstick speed

 V_R : Rotation speed

 V_{REF} : Reference landing speed

 V_S : Stalling speed or minimum steady flight speed at which the airplane is controllable

 V_{S1} : Stalling speed or minimum steady flight speed obtained in a specific configuration

 $V_{SR}\,\,$: Reference stall speed

 V_1 : Maximum speed in the takeoff at which the pilot must take the first action (e.g., apply brakes, reduce thrust, deploy speed brakes) to stop the airplane within the accelerate-stop distance. V_1 also means the minimum speed in the takeoff, following a failure of the critical engine at V_{EF} , at which the pilot can continue the takeoff and achieve the required height above the takeoff surface within the takeoff distance.

 V_2 : Takeoff safety speed

Certaines de ces vitesses sont les vitesses minimales de sécurité de l'avion, c'est-à-dire les vitesses de décrochage $(V_S, V_{mu}, V_{MC}, ...)$. Les autres sont des vitesses opérationnelles par lesquelles l'avion passera durant le décollage $(V_R, V_{LOF}, V_2, ...)$ et dont une marge de sécurité doit être prise par rapport aux vitesses de décrochage.

Dans ce chapitre, nous allons répertorier les contraintes réglementaires de sécurité imposées par la norme avion sur ces différentes vitesses, et nous donnerons un ordre de grandeur pratique des valeurs opérationnelles de ces vitesses.

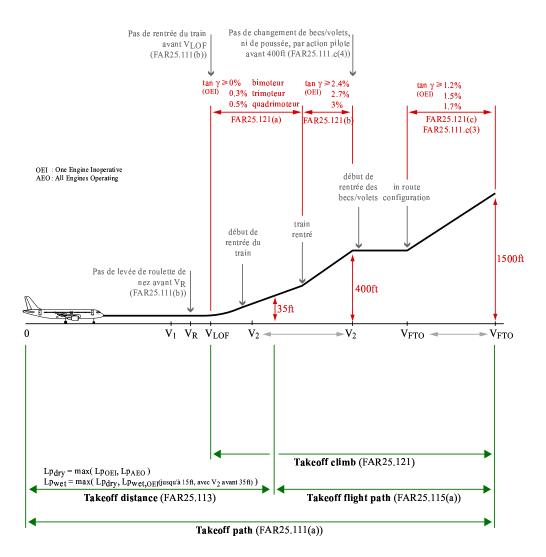


Fig. 2.1 – Procédure de décollage selon la norme FAR 25.

2.1 Récapitulatif des encadrements imposés par la norme FAR 25

La norme FAR 25 en vigueur pour les avions de transport civil, impose des encadrements réglementaires des vitesses caractéristiques du décollage que nous récapitulons dans ce paragraphe :

Vitesses maîtresses	Vitesses opérationnelles		
vitesses minimales, de décrochage	f	onction des vitesses r	naîtresses
	FAR 25.107.e	$V_{LOF} \ge 1.05 V_{mu}$	avec panne (OEI)
Longitudinales (décrochage aile)		$\geq 1.10 \ V_{mu}$	sans panne (AEO)
V_{mu} minimum unstick speed	AC25-7A	$\geq 1.08 \ V_{mu}$	AEO, geometry-limited
V_{SR} reference stall speed	FAR 25.107.b	$V_2 \geq 1.13 V_{SR}$	bi ou trimoteurs
FAR 25.103.a : $V_{SR} \gtrsim V_{S1}$		$\geq 1.08 V_{SR}$	quadrimoteurs
	FAR 25.125.a.2	$V_{REF} \ge 1.23 V_{SR}$	conf. d'atterrissage
Latérales (décrochage dérive)			
V_{MC} minimum control speed with	FAR 25.107.a	$V_{EF} \geq V_{MCG}$	
the critical engine inoperative	FAR 25.107.e	$V_R \ge 1.05 V_{MC}$	
FAR 25.149.c: $V_{MC} \le 1.13 V_{SR}$	FAR 25.107.b	$V_2 \geq 1.10 V_{MC}$	

Tab. 2.1 – Récapitulatif [Boi01a] des contraintes de la norme FAR 25 [FAA03] des vitesses au décollage

Afin de prévoir le cas critique du décollage avec panne moteur, la norme impose également :

$$V_R \ge V_1$$
 FAR 25.107(e)

Ce qui permet, si besoin est, d'interrompre le décollage avant que la rotation de l'avion ait commencé.

2.2 Valeurs opérationnelles des vitesses au décollage

La norme avion impose seulement des encadrements réglementaires des vitesses de décollage, mais nous avons besoin de valeurs pratiques, opérationnelles pour modéliser le décollage. C'est pourquoi, dans ce paragraphe, nous donnerons un ordre de grandeur opérationnel des vitesses caractéristiques du décollage, par rapport à la vitesse de décrochage à 1g que nous prendrons comme référence, et égale à

$$V_{S1} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SCz_{max}}} \tag{2.1}$$

 Cz_{max} Coefficient de portance maximale. Dépend de la configuration becs/volets. q Constante de gravité terrestre $q = 9.81 \ m/s^2$

g Constante de gravité terrestre $g = 9.81 \, m/s^2$ m/s^2 Charge alaire, c'est-à-dire rapport de la masse avion m et de la surface voilure $S = kg/m^2$

Vitesse de décrochage à 1-g m/s ρ Masse volumique de l'air. Dépend de l'altitude, c'est-à-dire dans notre cas de kq/m^3

ho Masse volumique de l'air. Dépend de l'altitude, c'est-à-dire dans notre cas de kg/m^3 l'altitude de la piste. $ho(h=0m)=
ho_0=1.225\ kg/m^3$.

 $^{^1\}mathrm{Lors}$ de l'essai déterminant la vitesse de décrochage, la poussée doit être réduite (cf.AC25-7A section 6.C.4 relative à la norme FAR 25.103.a) et une interpolation des mesures doit être faite pour supprimer ses effets (équivalant à une poussée nulle). C'est pourquoi dans l'équation de sustentation, nous négligeons le terme de poussée : $mg = \frac{1}{2} \rho S \, V_{S1}^2 C z_{max} + F \sin \alpha_{\max}$

Les méthodes employées pour déterminer ces ordres de grandeurs sont spécifiées dans chacun des sous-paragraphes : soit trouvés dans la littérature, soit calculés par une moyenne de données expérimentales, soit obtenus avec une modélisation simple des phénomènes en jeux.

2.2.1 Vitesse de décrochage V_S

La vitesse de décrochage V_S est la vitesse minimale de vol, pour une configuration becs/volets donnée. Lorsque la vitesse est plus faible, l'avion décroche. Cela est dû à une perte plus ou moins brusque de portance, provoquée par les filets d'air qui se décollent de l'extrados de l'aile lorsque l'incidence est trop élevée. La vitesse de décrochage est conditionnée par l'incidence maximale admissible.

Lors du décrochage, l'avion est souvent soumis à des vibrations (buffeting) dues à l'apparition d'un écoulement tourbillonnaire de l'air sur l'aile. Puis, il fait une abattée c'està-dire un piqué du nez provoquant une perte d'altitude² Les gouvernes sont également "molles", moins efficaces, et la mise en butée arrière du manche ne permet pas d'augmenter l'assiette.

"..

- (d) The airplane is considered stalled when the behavior of the airplane gives the pilot a clear and distinctive indication of an acceptable nature that the airplane is stalled. Acceptable indications of a stall, occurring either individually or in combination, are—
- (1) A nose-down pitch that cannot be readily arrested;
- (2) Buffeting, of a magnitude and severity that is a strong and effective deterrent to further speed reduction; or
- (3) The pitch control reaches the aft stop and no further increase in pitch attitude occurs when the control is held full aft for a short time before recovery is initiated.

Amdt. 25-108, Eff. 12/26/2002 "

- FAR 25.201(d): Stall demonstration - [FAA03] - -

La vitesse de décrochage dépend essentiellement de la charge alaire de l'avion $\frac{m}{S}$, de la configuration des hypersustentateurs (par le coefficient de portance maximal Cz_{max}), et de l'altitude (par la masse volumique de l'air ρ).

Le guide des essais en vol de certification AC25-7A [FAA98] décrit la maœuvre à effectuer pour mesurer la vitesse de décrochage. Pour chaque configuration avion (configuration de décollage, d'atterrissage, en route, ...), la procedure suivante doit être effectuée pour mesurer la vitesse de décrochage. Le trim de l'avion doit être réglé pour qu'il ne soit pas nécessaire d'agir sur le manche, pour maintenir une vitesse 20 à 40% au dessus de la valeur attendue de la vitesse de décrochage. Les moteurs doivent être au ralenti (l'AC25-7A sec.6.4 recommande une correction par interpolation linéaire dans le cas où la poussée influencerait les mesures). Le pilote tire sur le manche progressivement afin d'assurer une décélération³ constante de l'avion jusqu'au décrochage. Il pourra ensuite utiliser comme bon lui semble la manette des gaz, afin de récupérer l'avion parti en

²Cette perte d'altitude pourrait entraîner de catastrophiques conséquences si un décrochage de l'avion se produisait proche du sol. C'est pourquoi la norme FAR 25 impose des marges de sécurité par rapport au décrochage, pour les vitesses minimales opérationnelles de décollage et d'atterrissage.

³Le taux de décélération est défini (Figure 2.2, p. 34) comme la pente de la ligne droite reliant la vitesse de décrochage à la vitesse valant 10% de plus que la vitesse de décrochage, du tracé de la vitesse

décrochage. Au moins 6 tests doivent être effectués avec des taux de décélération faibles de 0.5 à 1.5 kt/s, afin de disposer d'assez de mesures pour interpoler la valeur de la vitesse de décrochage qui correspond à un taux de décélération de 1 kt/s.

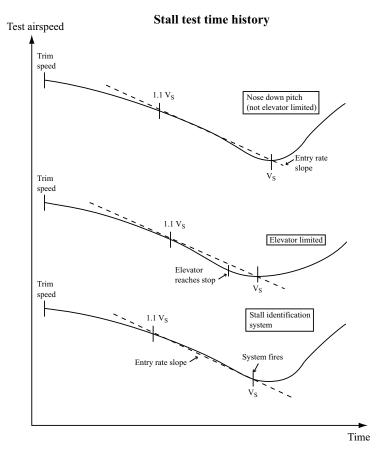


FIG. 2.2 – Relevé de la vitesse avion en fonction du temps lors de la manœuvre de décrochage permettant de mesurer la V_S . Figure proposée sec.6 de l'AC25-7A [FAA98].

Le fait d'effectuer la manœuvre avec une décélération très faible, permet de garder un vol quasi-équilibré à 1-g jusqu'au décrochage. La vitesse de décrochage à 1-g V_{S1} est la plus faible vitesse mesurée pour laquelle le facteur de charge soit égal à 1. Lorsque l'avion décroche, il fait une abatée réduisant le facteur de charge. La vitesse de décrochage V_S est la plus petite vitesse atteinte durant la manœuvre (Figure 2.2, p. 34). L'annexe 5 de l'AC25-7A [FAA98] indique que pour les avions de transport civil, le facteur de charge obtenu à V_S est de l'ordre de 0.88, ce qui revient à dire que la vitesse minimale V_S représente environ 94% de la V_{S1} .

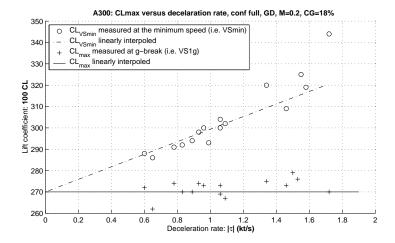
$$V_S \approx 0.94 V_{S1}$$

mesurée en fonction du temps.

taux de décélération
$$=\frac{V_S-1.1V_S}{t_{V_S}-t_{1.1V_S}}$$

REMARQUE 2.1 La norme FAR 25 était anciennement définie par rapport à la vitesse de décrochage V_S . Cela a changé depuis 1996 (cf. FAA Notice of Proposed Rulemaking. Notice No. 95-17; Issued on 11/29/1995. Published in the Federal Register on January 18, 1996 : 61 FR 1260), la vitesse de décrochage de référence est maintenant définie par le décrochage à 1-g, ce qui a permis d'harmoniser la norme FAR 25 par rapport à la norme européenne JAR 25.

Remarque 2.2 Certains avions ont un décrochage très franc, ce qui conduit à une vitesse minimale V_S mesurée au cours de la manœuvre, du même ordre de grandeur que la vitesse de décrochage à 1-g V_{S1} . Pour ces avions, la nouvelle norme en vigueur qui considère comme vitesse de référence V_{S1} au lieu de $V_S = 0.94V_{S1}$, est plus avantageuse puisqu'elle autorise des vitesses minimales opérationnelles de décollage et atterrissage plus faibles.



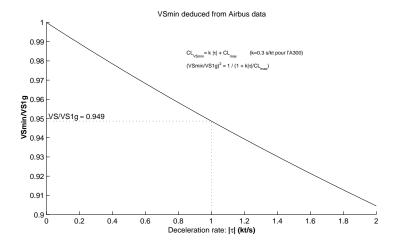


FIG. 2.3 – Exemple d'un relevé de mesures Airbus (1ère figure [Sab05]) pour déterminer la vitesse de décrochage de l'A300. Ces mesures permettent (2ème figure) de déterminer l'évolution de la vitesse minimale V_{Smin} en fonction du taux de décélération τ utilisé au cours de l'essai. Par définition, la vitesse de décrochage V_S correspond à un taux de 1 kt/s : $V_S = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{k}{C_{Smax}}}}V_{S1}$

2.2.2 Vitesse "minimum unstick" V_{mu}

La vitesse V_{mu} (minimum unstick) est la plus petite vitesse qui permette à l'avion de quitter le sol et de continuer le décollage (FAR 25.107.d).



FIG. 2.4 – Essais en vol de V_{mu} de l'A340-642 à Toulouse le 27 juillet 2001. Ce vol de certification consiste à démontrer la vitesse minimale V_{mu} à laquelle l'avion peut quitter le sol. Pour cela, l'avion au décollage est cabré au maximum laissant son fuselage frotter contre le sol (Un sabot est à cette occasion fixé par protection sous la queue de l'avion. Son frottement sur la piste crée des étincelles visibles sur la photo). La V_{mu} est la vitesse à laquelle le dernier atterrisseur principal quitte le sol.

La V_{mu} est une sorte de vitesse de décrochage V_{S1} mais qui est mesurée :

- dans l'effet de sol,
- avec une incidence limitée non pas, par le décrochage de l'aile mais, par l'assiette maximale θ_{TS} géométriquement possible pour éviter à la queue de l'avion d'heurter le sol,
- et en tenant compte de la contribution de la poussée F (Une distinction est faite entre la V_{mu} sans panne moteur et la V_{mu} avec panne moteur).

Nous allons modéliser ces trois effets afin de déterminer le rapport des vitesses $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$.

En notant en indice IGE (In Ground Effet) les valeurs en effet de sol et OGE (Out of Ground Effet) les valeurs hors effet de sol, l'équation de sustentation permet d'écrire :

$$mg = \frac{1}{2} \rho S V_{mu}^2 C z_{MU,IGE} + F(V_{mu}) \sin \theta_{TS}$$
$$= \frac{1}{2} \rho S V_{S1}^2 C z_{maxOGE}$$

On en déduit :

$$1 = \frac{V_{mu}^{2}}{V_{S1}^{2}} \frac{Cz_{MU,IGE}}{Cz_{maxOGE}} + \frac{F(V_{mu})}{mg} \sin \theta_{TS}$$

$$\frac{V_{mu}}{V_{S1}} = \sqrt{\frac{Cz_{maxOGE}}{Cz_{MU,IGE}}} \sqrt{1 - \frac{F(V_{mu})}{mg}} \sin \theta_{TS}$$

$$= \sqrt{\frac{Cz_{maxOGE}}{Cz_{MU,OGE}}} \sqrt{\frac{Cz_{MU,OGE}}{Cz_{MU,IGE}}} \sqrt{1 - \frac{F(V_{mu})}{mg}} \sin \theta_{TS}$$
Effect de sol Contribution de la poussée

L'effet de sol est généralement⁴ bénéfique pour le coefficient de portance, ce qui implique que le terme $\sqrt{\frac{Cz_{MU,OGE}}{Cz_{MU,IGE}}} \le 1$, c'est-à-dire que l'effet de sol aurait tendance à rendre la V_{mu} inférieure à la vitesse de décrochage V_{S1} qui est mesurée hors effet de sol.

La mesure de la vitesse de décrochage V_{S1} se fait à poussée au ralenti, alors que celle de la minimum unstick V_{mu} se fait à poussée maximale⁵. La contribution de la poussée selon l'axe de portance, aura donc tendance à rendre la V_{mu} inférieure à la vitesse de décrochage V_{S1} : $\sqrt{1 - \frac{F(V_{mu})}{mg}} \sin \theta_{TS} \leq 1$. Comme en cas de panne moteur (OEI One Engine Inoperative), la poussée est inférieure au cas sans panne moteur (AEO All Engines Operating), la vitesse V_{mu} avec panne moteur sera supérieure à celle sans panne moteur.

Par contre, la limitation d'assiette à θ_{TS} (tail strike) implique une incidence de minimum unstick plus petite que l'incidence de décrochage. Par conséquent la limitation en assiette $\sqrt{\frac{Cz_{maxOGE}}{Cz_{MU,OGE}}} \geq 1$ a tendance à rendre la vitesse V_{mu} supérieure à la vitesse de décrochage V_{S1} . Nous verrons d'ailleurs que c'est cette limitation qui est prépondérante et que par conséquent, la vitesse de minimum unstick V_{mu} est généralement supérieure à la vitesse de décrochage V_{S1} .

Limitation de l'assiette au décollage θ_{TS}

L'assiette longitudinale maximale de l'avion (donc l'incidence également) est limitée au moment de l'envol; c'est une limite géométrique donnée par le toucher de la queue de l'avion au sol (Figure 2.5, p. 38). Lors de la conception de l'avion, cette limite géométrique est probablement choisie par sécurité afin qu'il ne soit pas possible d'atteindre des incidences supérieures à l'incidence maximale de décrochage.

Le coefficient de portance maximal Cz_{maxOGE} est une donnée, dépendant du déploiement des becs et volets de la voilure.

Hors effet de sol, le coefficient de portance de l'avion peut s'estimer à l'aide de la polaire habituelle. Ainsi pour une incidence égale à l'assiette maximale de l'avion au décollage, le coefficient de portance hors effet de sol s'exprime par :

$$Cz_{MU,OGE} = Cz_{\alpha} (\theta_{TS} - \alpha_0)$$

Le coefficient de portance $Cz_{MU,OGE}$ étant toujours inférieur au coefficient de portance maximal Cz_{maxOGE} , le terme $\sqrt{\frac{Cz_{maxOGE}}{Cz_{MU,OGE}}} \geq 1$ est toujours supérieur à 1, c'est-à-dire que la limitation de l'assiette maximale θ_{TS} à tendance à rendre la vitesse V_{mu} supérieure à la vitesse de décrochage V_{S1} . Nous verrons qu'en pratique les vitesses V_{mu} sont effectivement plus élevées que la V_{S1} malgré l'effet de sol et la contribution de la poussée.

 $^{^4}$ Pour les grandes incidences, il arrive parfois que l'effet de sol soit pénalisant, c'est-à-dire qu'il induise une diminution de portance Cz au lieu d'une augmentation. Nous verrons que c'est le cas de l'A300 lorsqu'il est en configuration fortement hypersustenté.

⁵Pour le cas de la V_{mu} avec panne moteur (OEI : One Engine Inoperative), au lieu de faire l'essai avec N_m-1 moteurs à plein gaz, la FAA AC25-7A [FAA98] autorise de faire l'essai avec les N_m délivrant une poussée plus faible, "équivalente" au cas de panne moteur.

Cette dérogation permet de déterminer la V_{mu} de panne moteur, sans compliquer la tâche aux pilotes d'essais, en éliminant la dissymétrie en lacet que provoquerait l'arrêt d'un des moteurs.

Par ailleurs, si la demonstration de V_{mu} avec panne moteur se faisait en coupant un des moteurs, et que par comble de malchance, l'un des autres moteurs tombait réellement en panne durant l'essai, il serait très périlleux pour les pilotes d'essais de se sortir d'une telle situation. En effet, allumer un moteur coupé prend un certain temps. Par contre, si l'essai se fait avec l'ensemble des moteurs à poussée plus faible que la poussée maximale, et que l'un des moteurs tombe en panne, il est plus aisé de remettre plein gaz aux moteurs restants.

Le terme dû à la limitation de l'assiette au décollage $\sqrt{\frac{Cz_{maxOGE}}{Cz_{MU,OGE}}}$ est une fonction décroissante (Figure 2.9, p. 44) de l'assiette maximale θ_{TS} . Plus l'assiette maximale θ_{TS} est élevée, plus la V_{mu} sera petite.



FIG. 2.5 – Lors du décollage, l'avion a son assiette maximale θ_{TS} (Tail Strike) limitée par la géométrie de son train et de son fuselage.

Avion	A318	A300	A380	B727	B737	B747	B757	B767	B777	DC8	MD11
θ_{TS} (°)	14.9	14.5	13.8	7.5	13	11.3	11	11.6	10.9	11.1	10.6

TAB. 2.2 – Assiette maximale θ_{TS} au sol (Figure 2.5, p. 38). Valeurs approximatives, mesurées sur des plans d'avions disponibles sur les sites internet des constructeurs.

Pour un avion de type A300 en configuration de décollage (conf.1), le coefficient de portance à l'assiette maximale vaut $Cz_{MU,OGE}=5$ (14.47 – (-2)) $\frac{\pi}{180}=1.44$, et le coefficient de portance maximale est de l'ordre de $Cz_{maxOGE}=1.73$. Ainsi, le terme dû à la limitation de l'assiette au décollage dans le rapport de vitesse $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$ vaut :

$$\sqrt{\frac{Cz_{maxOGE}}{Cz_{MU,OGE}}} \approx 1.097$$



FIG. 2.6 – Décollage anormal avec toucher de queue d'un B727-276 à Mexico (21 février 2003). (Photo: Ricardo Morales Aviation Photography of Mexico). Certains avions récents, tel que l'A340-600, sont équipés de dispositifs d'asservissements automatiques empêchant la queue de heurter le sol: la distance minimale entre la queue de l'avion et la piste est de l'ordre d'une trentaine de centimètres. Dans ce cas, en tirant à fond sur le manche, le pilote obtient le maximum que peut donner l'avion en toute sécurité.

Effet de sol

Pour estimer le rapport des coefficients de portance dans et en dehors de l'effet de sol $\frac{Cz_{MU,IGE}}{Cz_{MU,OGE}}$, il est nécessaire d'utiliser un modèle d'effet de sol. Dans ce paragraphe, deux modèles sont répertoriés : l'un de B.W.McCormick très simple et un autre de l'ESDU plus sophistiqué.

B.W.McCormick [McC95] propose un modèle simple de l'effet de sol (Figure 2.7, p. 39) qui permet de déterminer le rapport de coefficient de portance $\frac{Cz_{MU,IGE}}{Cz_{MU,OGE}}$ en fonction de la demi-envergure de l'aile rapportée à sa hauteur par rapport au sol $\frac{b/2}{b}$.

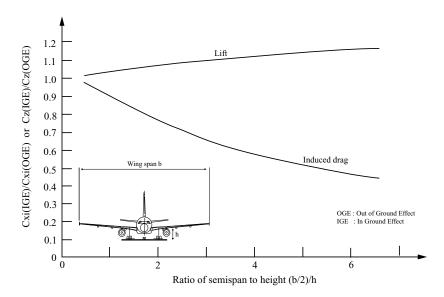


FIG. 2.7 - B.W.McCormick [McC95]: Effect of proximity to ground on the lift coefficient and induced drag coefficient

Avion	A318	B727	B737	B747	B757	B767	B777	DC8	MD11	Moyenne
$\frac{b/2}{h}$	5	7.5	5.86	6.69	5	5.88	5.88	6.3	6.1	6

TAB. 2.3 – Ordre de grandeur du rapport entre la demi-envergure et la hauteur de l'aile (à environ 40% de l'emplanture), mesuré approximativement sur des plans d'avion

En mesurant grossièrement sur des plans d'avions, le rapport moyen $\frac{b/2}{h} \approx 6$ de la hauteur h de l'aile par rapport au sol, et de la demi envergure $\frac{b}{2}$, le rapport $\frac{Cz_{MU,IGE}}{Cz_{MU,OGE}} \approx 1.15$ se déduit à l'aide du modèle d'effet de sol de B.W.McCormick (Figure 2.7, p. 39). La participation de l'effet de sol dans le rapport de vitesse $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$ est, selon le modèle de B.W.McCormick, de l'ordre de :

$$\sqrt{\frac{Cz_{MU,OGE}}{Cz_{MU,IGE}}} \approx 0.93$$

Un modèle d'effet de sol un peu plus sophistiqué est proposé par l'ESDU [ESD72] :

$$\frac{Cz_{IGE}}{Cz_{OGE}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{Cz\alpha\sigma}{\pi\lambda}} \left(\frac{Cz\alpha\sigma}{\pi\lambda} + r \left(\frac{N}{\left(1 - \frac{\tau N Cz_{OGE}}{1 + \frac{Cz\alpha\sigma}{\pi\lambda}}\right)^2} - 1 \right) \right)$$

$$N = 1 + (N' - 1) \left(1 + \frac{2}{Cz_{OGE}} \left(Cm - Cm_{lisse} \right) \right)$$

$$N' = 0.00239 \left(10 \frac{\ell}{h} + 16 \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + \left(\frac{\ell}{h} \right)^3 \right)$$

$$\tau = \frac{\frac{h}{\ell}}{8\pi \left(\left(\frac{h}{\ell} \right)^2 + 1/64 \right)}$$

$$\sigma = e^{-2.48 \left(\frac{h}{b/2} \right)^{0.768}}$$

$$r = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{b/2} \right)^2 - \frac{h}{b/2}}$$

: Wing span m

: Pitching moment coefficient of wing and body about the quarterchord point of aerodynamic mean chord, positive nose up

 Cm_{lisse} : Cm with flaps and slats retracted at the same aircraft incidence

 Cz_{IGE} : Aircraft lift coefficient in ground effect Cz_{OGE} : Aircraft lift coefficient out of ground effect

 Cz_{α} : Lift slope in free air

: Height above ground of quarter-chord point of aerodynamic mean chord of wing

 ℓ : Standard mean chord of wing m

 λ : Aspect ratio of wing

Pour une voilure trapézoïdale, la surface voilure peut s'exprimer en fonction de l'effilement voilure ε et de la corde à l'emplanture $C_{emp}: S = bC_{emp} \frac{\varepsilon+1}{2}$. La corde aérodynamique moyenne s'exprime également par : $\ell = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} C^2(y) dy = \frac{2}{3} C_{emp} \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon + 1}{\varepsilon + \frac{1}{2}}$. Ainsi dans le modèle ESDU, le rapport $\frac{\ell}{h}$ peut s'exprimer en fonction du rapport $\frac{h}{h}$ dont l'ordre de grandeur est connu (Table 2.2.2, p. 39):

$$\frac{h}{\ell} = \frac{h}{h} \frac{3}{4} \lambda \frac{(\varepsilon + 1)^2}{\varepsilon^2 + \varepsilon + 1}$$

Un gain de coefficient de portance dans l'effet de sol, c'est-à-dire le terme $\sqrt{\frac{Cz_{MU,OGE}}{Cz_{MU,IGE}}}$ inférieur à 1, diminue la vitesse V_{mu} . Ce gain est d'autant plus faible (Figure 2.9, p. 44) que l'assiette maximale au sol θ_{TS} est grande, et peut même se traduire par une perte de portance si l'incidence et l'hypersustentation sont fortes (rapport $\sqrt{\frac{Cz_{MU,OGE}}{Cz_{MU,IGE}}}$ supérieur à 1 pour la configuration 4 d'atterrissage très hypersustentée).

"L'effet de sol apporte un gain sur le Cz de l'avion jusqu'à des incidences d'environ 12°. Au-delà, l'effet s'inverse et, en fait, le Cz_{max} en effet de sol est inférieur au Cz_{max} en air libre."

- Guy Bousquet - [Bou04] - -

40 18 décembre 2006 Pour un avion de type A300 en configuration 1 de décollage, avec un coefficient de portance $Cz_{MU,OGE}=Cz_{\alpha}\left(\theta_{TS}-\alpha_{0}\right)=1.44$, le modèle ESDU donne le rapport suivant :

$$\frac{Cz_{MU,IGE}}{Cz_{MU,OGE}} = 1.0559$$

Ce résultat est moins optimiste que celui du modèle de B.W.McCormick. La participation de l'effet de sol dans le rapport de vitesse $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$ est, selon le modèle ESDU, de l'ordre de :

$$\sqrt{\frac{Cz_{MU,OGE}}{Cz_{MU,IGE}}} \approx 0.97$$

Contribution de la poussée

L'essai de la V_{mu} doit se faire dans l'ensemble du domaine de définition du rapport poussée/poids pour lequel l'avion doit être certifié (cf.FAR 25.107(d)). La V_{mu} doit être démontrée avec ou sans panne moteur, sachant que le cas de la panne moteur peut être démontré en effectuant un test "équivalent" tous moteurs en route en considérant des facteurs correctifs (cf. AC25-7A section 2).

La contribution de la poussée dans le rapport $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$ est fonction du rapport de poussée $\frac{F(V_{mu})}{mg}$, avec $F(V_{mu})$ la poussée maximale des moteurs en fonctionnement à la vitesse V_{mu} . En introduisant F_0 la poussée au point fixe des moteurs, ce rapport peut se décomposer en deux termes : l'un étant la perte de poussée avec la vitesse, l'autre étant le taux de propulsion (rapport poussée sur poids).

$$\frac{F(V_{mu})}{mg} = \frac{F(V_{mu})}{F_0} \frac{F_0}{mg}$$

La perte de poussée avec la vitesse peut, pour un moteur d'avion civil moyen (taux de dilution $\lambda \approx 6$), être modélisée par notre modèle moteur [Rou02]. Pour des vitesses de décollage (Mach entre 0.2 et 0.3), la perte de poussée est de l'ordre de 20%: $\frac{F(V_{mu})}{F_0} \approx 0.8$ (pour le cas de la V_{mu} avec panne moteur, cela revient à $\frac{F(V_{mu})}{F_0} \approx 0.8 \frac{N_m-1}{N_m}$). Plus le taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ est élevé (Figure 2.9, p. 44), plus le terme de contribution

Plus le taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ est élevé (Figure 2.9, p. 44), plus le terme de contribution de poussée $\sqrt{1 - \frac{F(V_{mu})}{mg}} \sin \theta_{TS}$ diminue, plus la V_{mu} sera petite. Ce phénomène est d'autant plus marqué que l'assiette maximale θ_{TS} de l'avion au sol est importante.

Rapport poussée/poids	Bimoteur	Trimoteur	Quadrimoteur
$\frac{F_0}{mg}$	0.31	0.25	0.21

TAB. 2.4 – Rapport poussée sur poids en fonction du nombre de moteur [Boi01a].

Pour un bimoteur moyen, le rapport poussée sur poids moyen (Table 2.2.2, p. 41) est de l'ordre de $\frac{F_0}{mg} \approx 0.31$. Avec une perte de poussée en fonction de la vitesse de l'ordre de 20%, le rapport $\frac{F(V_{mu})}{F_0}$ est de l'ordre de 0.8.

$$\frac{F(V_{mu})}{mg} = \frac{F(V_{mu})}{F_0} \frac{F_0}{mg} \approx 0.248$$
 0.124 en cas de panne moteur

Pour un avion de type A300 ($\theta_{TS}=14.47^{\circ}$), la contribution de la poussée dans le rapport de vitesse $\frac{V_{mu}}{V_{C1}}$ est de l'ordre de :

$$\sqrt{1-\frac{F(V_{mu})}{mg}\,\sin\theta_{TS}}\approx \begin{cases} 0.9685 & \text{Sans panne moteur,} \\ 0.9844 & \text{Avec panne moteur.} \end{cases}$$

Conclusion : ordre de grandeur du rapport $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$

Guy Bousquet [Bou04] indique que pour des avions classiques, du type A319, A320, A330, A340, on a :

$$1.06 \le \frac{V_{mu}}{V_{S1}} \le 1.10$$

Et pour des avions allongés du type A321, A340-500 ou A340-600, l'ordre de grandeur est :

$$1.10 \le \frac{V_{mu}}{V_{S1}} \le 1.12$$

Par ailleurs, sur une figure exposée dans l'ouvrage d'E.Torenbeek p.577 [Tor86], ce rapport semble de l'ordre de $V_{mu} \approx 0.95 \, V_{S1}$ pour un avion ayant un taux de propulsion de $\frac{F_0}{mq} = 0.3$.

Nous pouvons donc nous demander si la V_{mu} est supérieure ou inférieure à la vitesse de décrochage V_{S1} ?

Nous allons tenter de répondre à cette question en utilisant les résultats précédents. Le rapport de vitesse $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$ est le produit des termes de limitation d'assiette, d'effet de sol, et de contribution de la poussée.

Pour un avion de type A300 en configuration de décollage (conf.1 de becs et volets), le rapport des vitesses $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$ calculée à l'aide des modélisations précédentes, est de l'ordre de :

Sans panne moteur:

$$\frac{V_{mu}}{V_{S1}} = \begin{cases} 0.99 & \text{Avec le modèle d'effet de sol de McCormick,} \\ 1.03 & \text{Avec le modèle d'effet de sol de l'ESDU.} \end{cases}$$

Avec panne moteur:

$$\frac{V_{mu}}{V_{S1}} = \begin{cases} 1.01 & \text{Avec le modèle d'effet de sol de McCormick,} \\ 1.05 & \text{Avec le modèle d'effet de sol de l'ESDU.} \end{cases}$$

Pour l'ensemble des configurations becs/volets de l'A300, le détail des calculs est le suivant :

configuration bed	$_{ m cs/volets}$	0 (lisse)	1 (décollage)	2	3	4 (atterrissage)
Cz_{maxOGE}		1.4	1.73	2.25	2.68	3.13
α_0	(degrés)	-2	-2	-8	-11.4	-16.6
ΔCm_o		0	0.038	-0.133	-0.2585	-0.4774
$Cz_{MU,OGE}$		1.4	1.4373	1.9609	2.2576	2.7114
$Cz_{MU,IGE}$	(ESDU)	1.478	1.5176	1.9115	2.1111	2.3904
$\sqrt{\frac{Cz_{maxOGE}}{Cz_{MU,OGE}}}$		1	1.0971	1.0712	1.0895	1.0744
$\sqrt{\frac{Cz_{MU,OGE}}{Cz_{MU,IGE}}}$		0.97324	0.97319	1.0128	1.0341	1.065
$\sqrt{1+\frac{F}{mg}\sin\theta_{TS}}$	AEO	0.96852	0.96852	0.96852	0.96852	0.96852
•	OEI	0.98439	0.98439	0.98439	0.98439	0.98439
$\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$	AEO	0.94261	1.0341	1.0508	1.0912	1.1083
	OEI	0.95805	1.051	1.068	1.1091	1.1264

Nous en déduisons que la vitesse V_{mu} est généralement supérieure à la V_{S1} et que ceci est essentiellement dû à la limitation de l'assiette au sol θ_{TS} . L'effet de sol peut accentuer ce fait pour les configurations très hypersustentées aux grandes incidences, car dans ce cas l'effet de sol produit une perte de portance au lieu d'un gain. Plus le taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ est grand (Figure 2.9, p. 44), plus la V_{mu} est faible. Le rapport $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$ est bien plus sensible à la valeur de l'assiette maximale θ_{TS} (Figure 2.8, p. 43) qu'au rapport poussée sur poids $\frac{F_0}{mg}$ (Figure 2.9, p. 44).

poussée sur poids $\frac{F_0}{mg}$ (Figure 2.9, p. 44).

Pour avoir une vitesse V_{mu} la plus faible possible, on a donc intérêt à concevoir un avion ayant l'assiette maximale au sol θ_{TS} la plus grande possible, sans bien sûr excéder l'incidence de décrochage pour assurer un décollage en toute sécurité quelle que soit la configuration de becs et volets.

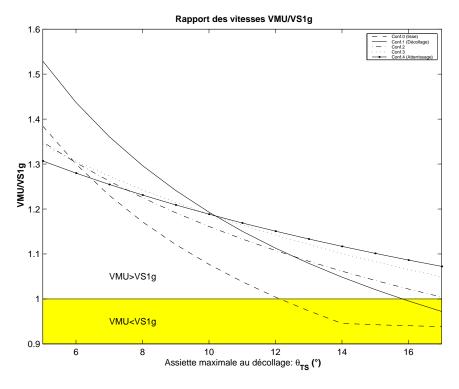


FIG. 2.8 – Impact de l'assiette maximale au sol θ_{TS} sur le rapport $\frac{V_{mu}}{V_{S1}}$. (Calcul effectué pour un taux de propulsion $\frac{F_0}{mg} = 0.3$)

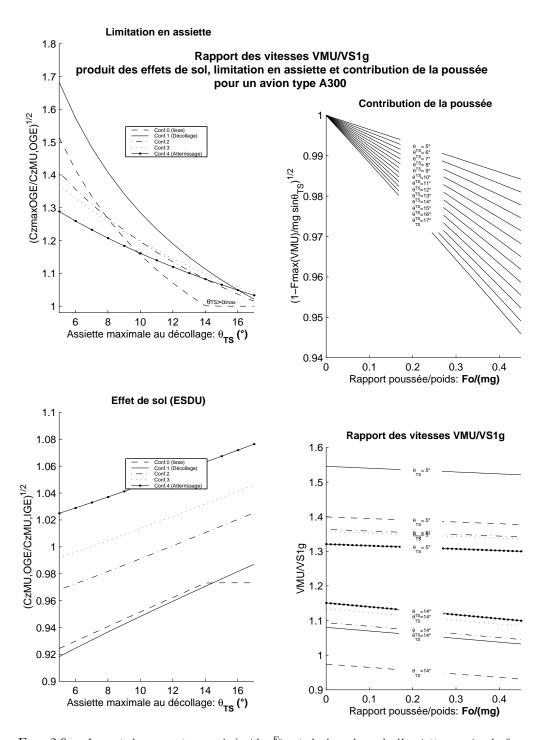


FIG. 2.9 – Impact du rapport poussée/poids $\frac{F_0}{mg}$ et de la valeur de l'assiette maximale θ_{TS} , pour les différentes configurations de becs/volets d'un avion de type A300, sur le rapport $\frac{V_{mu}}{V_{S1}} = \sqrt{\frac{C_{Z_{maxOGE}}}{C_{Z_{MU,OGE}}}} \sqrt{\frac{C_{ZMU,OGE}}{C_{Z_{MU,IGE}}}} \sqrt{1 - \frac{F(V_{mu})}{mg}} \sin \theta_{TS}$

2.2.3 Vitesse minimale de contrôle V_{MC}

La V_{MC} est la plus petite vitesse à laquelle il est possible de garder le contrôle de l'avion avec panne moteur (le moteur en panne à considérer est celui dont la panne est la plus pénalisante, c'est-à-dire le moteur le plus éloigné du fuselage) et maintenir un vol rectiligne, hors effet de sol, avec un angle de gîte ϕ de pas plus de 5 degrés (cf.FAR 25.149). Durant la manœuvre de récupération de l'avion, aucune habilité particulière de la part du pilote ne doit être requis, et le changement de cap résultat ne doit pas être de plus de 20° .

$$V_{MC} \le 1.13 V_{S1}$$

E.Pialat et H.Loubignac [PL03], donnent des valeurs de la vitesse minimale de contrôle air V_{MC} , ce qui permet de garder en tête un ordre de grandeur pour les avions de transport civil. Le rapport des vitesses minimal de contrôle et de décrochage $\frac{V_{MC}}{V_{S1}}$ est de 87.7% pour un A300, de 100% pour un A319, et de 96.4% pour un A340.

Au sol, cette vitesse est notée V_{MCG} . Elle correspond à la vitesse de roulage à laquelle, lorsque la panne du moteur le plus critique apparaît subitement, il est possible de garder le contrôle de l'avion en utilisant le palonnier seulement (sans utiliser la direction de la roulette de nez), et de permettre de continuer le décollage sans requérir une habileté particulière de la part du pilote. La trajectoire, à partir du point où le moteur tombe en panne et celui où l'avion retrouve une trajectoire rectiligne dans l'axe de la piste, ne doit pas présenter un écart latéral de plus de 30 ft en tout point.



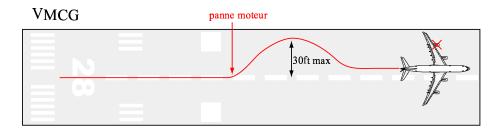


Fig. 2.10 – Vitesse minimale de contrôle V_{MC}

Remarque 2.3 La vitesse minimal de contrôle V_{MC} en l'air se détermine par les équations de dynamique du vol de l'avion en équilibre latéral, comme le montrent J.Collier et B.Trân [CT04] : (Table 2.5, p. 46). Par contre, il est plus difficile de modéliser la vitesse minimale de contrôle au sol V_{MCG} puisqu'elle va dépendre du coefficient de frottement pneu/piste en latéral qui n'est pas aisé à modéliser.

Dans notre modélisation de la longueur de piste au décollage, nous ne tiendrons pas compte des limitations en latéral, c'est-à-dire des limitations en V_{MC} .

Modèle de la vitesse minimale de contrôle air V_{MC} :

$$V_{MC} = a \frac{-T + \sqrt{E(G+2T)}}{E-T}$$

$$E = \left(\frac{Cn\delta n}{CY\delta n} - \frac{Cn\beta}{CY\beta}\right) CY\delta n \, \delta n$$

$$T = \frac{y_F F_0}{a^2 S \, \ell \, \rho_0}$$

$$G = \frac{2mg \sin \phi \cos \theta}{a^2 S \, \rho} \frac{Cn\beta}{CY\beta}$$

Variables et Unités:

: Vitesse du son dans l'air. Selon l'atmosphère standard, au sol, m/sa = 340m/s rad^{-1} $Cn\delta n$: Gradient du coefficient aérodynamique de moment de lacet provoqué par le braquage de la gouverne de lacet (de direction) $Cn\beta$: Gradient du coefficient aérodynamique de moment de lacet pro rad^{-1} voqué par le dérapage $CY\delta n$: Gradient du coefficient aérodynamique de force latérale provoquée rad^{-1} par le braquage de la gouverne de lacet (de direction) rad^{-1} CYβ: Gradient du coefficient aérodynamique de force latérale provoquée par le dérapage : Poussée maximale au point fixe (vitesse et altitude nulles) d'un Nseul moteur : Constante de gravité terrestre $g=9.81\ m/s^2$ m/s^2 : Corde de référence m $\frac{kg}{m^2}$: Masse de l'avion mS : Surface voilure de référence : Distance (perpendiculaire au plan de symétrie avion) entre le momteur externe et le centre de gravité de l'avion : Angle de gîte, imposé à 5°. rad θ : Assiette rad kg/m^3 : Masse volumique de l'air correspondant à l'altitude h de vol kg/m^3 : Masse volumique de l'air au sol. Selon l'atmosphère standard, $\rho_0 = \rho(h=0) = 1.225 \, kg/m^3$

Mode d'obtention : Obtenue par simplification (négliger certains termes par rapport à d'autres) de la solution analytique exacte issue des équations de la dynamique du vol (vol rectiligne à l'équilibre, avec panne moteur, avec une inclinaison maximale de 5°). Le modèle de la poussée considérée est $F = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{V}{a} + \frac{V^2}{2a^2}\right).$

Précision : Une erreur relative moyenne de 0.4% par rapport à la solution analytique exacte, et de 4.2% par rapport aux données expérimentales de 4 Airbus (A300, A319, A340-300, et A380).

Domaine de définition : Avion de transport civil

Tab. 2.5 – Modèle de J.Collier et B.Trân [CT04] de la vitesse minimale de contrôle V_{MC}

2.2.4 Vitesse critique de panne moteur au décollage V_{EF}

La V_{EF} est la vitesse la plus critique à laquelle peu survenir une panne moteur durant le décollage. Suite à une panne moteur à V_{EF} , le pilote mettra un temps de réaction de $\Delta t_{\rm réaction}$ pour prendre conscience de la panne et agir en conséquence. Durant ce laps de temps, l'avion continu à accélérer. L'avion atteint la vitesse de décision V_1 (Section 2.2.5, p. 48) quand le pilote agit pour interrompre ou non le décollage (réduction de la poussée, action sur les freins, sortie des spoilers...si le pilote décide d'interrompre le décollage).

" Δt is the demonstrated time interval between engine failure and initiation of the first pilot action to stop the airplane. This time interval is defined as beginning at the instant the critical engine is failed and ending when the pilot recognizes and reacts to the engine failure, as indicated by the pilot's application of the first retarding means during accelerate-stop tests. A sufficient number of demonstrations should be conducted using both applicant and FAA test pilots to assure that the time increment is representative and repeatable. The pilot's feet should be on the rudder pedals, not the brakes, during the tests. For AFM data expansion purposes, in order to provide a recognition time increment that can be executed consistently in service, this time increment must be equal to the demonstrated time or one second, whichever is greater. If the airplane incorporates an engine failure warning light, the recognition time includes the time increment necessary for the engine to spool down to the point of warning light activation, plus the time increment from light "on" to pilot action indicating recognition of the engine failure."

- FAA AC25-7A: Flight test guide for certification of transport category airplanes ([FAA98] Chapitre 1, section 2.11.3) -

Remarque 2.4 Le temps de réaction du pilote en cas de panne moteur au décollage est en moyenne, de l'ordre de $\Delta t_{\rm réaction}=0.6~s$, d'après Jacques Rosay [Ros05]

La vitesse V_{EF} étant la vitesse la plus critique à laquelle une panne peut survenir, alors un décollage interrompu à V_1 suite à une panne à V_{EF} prendra autant de longueur de piste (Figure 2.11, p. 48) qu'un décollage qui a été continué malgré une panne moteur à V_{EF} . Cette vitesse se calcule donc numériquement, par itération, tout comme la vitesse de décision V_1 (Section 2.2.5, p. 48).

La norme FAR 25.107.a(1) impose que cette vitesse V_{EF} ne soit pas inférieure à la vitesse minimale de contrôle au sol V_{MCG} .

 $V_{EF} \ge V_{MCG}$

 $^{^6\}mathrm{Dans}$ ce document, j'ai préféré noter $\Delta t_{\mathrm{réaction}}$ ce temps de réaction pilote

2.2.5 Vitesse de décision V_1

La norme FAR 1 (Definitions and abbreviations) définit la vitesse de décision V_1 . La vitesse de décision V_1 est la vitesse maximale durant le décollage, à laquelle le pilote doit prendre la première mesure (c'est-à-dire freiner, réduire la poussée, déployer les aérofreins) pour arrêter l'avion en cas de décollage interrompu. La V_1 signifie également la vitesse minimale durant le décollage, à la suite d'une panne moteur critique à V_{EF} , à laquelle le pilote peut continuer le décollage et satisfaire le passage de la hauteur de sécurité.

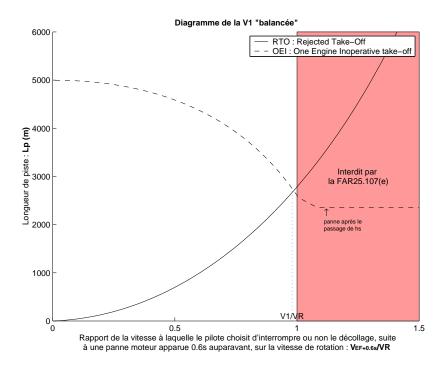


FIG. $2.11 - Vitesse \ V_1$ balancée. Exemple de longueur de piste parcourue par un avion de type A300 avec une vitesse de rotation de $V_R = 1.15V_{S1}$ et une vitesse de tangage de $q = 3.5^{\circ}/s$. Plus la panne moteur apparaît tôt, plus il est facile d'arrêter l'avion, c'est pourquoi la longueur de piste utilisée pour un décollage arrêté (RTO Rejected-TakeOff) est une fonction croissante. Au contraire, plus la panne intervient tôt lors du décollage, plus il serait difficile de décoller: la longueur de piste au décollage avec panne moteur est donc une fonction décroissante. L'intersection de ces deux courbes définit la V_1 "balancée", elle correspond au cas le plus critique nécessitant la plus grande longueur de piste. En pratique, si le pilote s'aperçoit d'une panne moteur: avant V_1 il arrête l'avion, après V_1 il continue le décollage.

Pour calculer la vitesse de décision V_1 , on cherche donc la vitesse qui satisfasse ces deux cas : Vitesse pour laquelle la distance d'un décollage interrompu à cette vitesse est égale à la distance de décollage réussi avec panne moteur critique à V_{EF} . Lorsque la vitesse de décision V_1 correspond à l'intersection des longueurs de piste de décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) et décollage réussi avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative), cette vitesse s'appelle la V_1 balancée (Figure 2.11, p. 48). Mais il arrive parfois que cette vitesse soit contrainte par d'autres critères comme illustrés (Figure 2.12, p. 49).

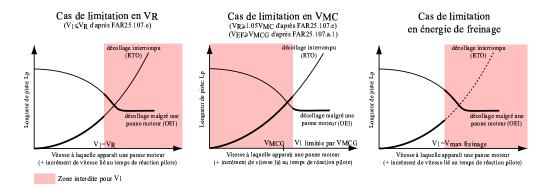


FIG. $2.12 - Vitesse V_1$ non balancée, c'est-à-dire contrainte. F.Marani et Patrick Sallier [MS00] montrent trois critères, ici illustrés, pouvant contraindre la V_1 .

Le calcul de la V_1 se fait généralement par itération numérique. Néanmoins un ordre de grandeur peut être retenu. On sait que cette vitesse est forcément inférieure à la vitesse de rotation la FAR 25.107(e); il est difficile d'imaginer de stopper l'avion alors que la roulette de nez a quitté le sol!

$$V_1 \leq V_R$$

À défaut de pouvoir calculer simplement (sans itérations numériques) la vitesse de décision V_1 , nous pouvons tout de même avoir un ordre de grandeur en tête. Pour le quadri-moteur A380 [Dan03], la vitesse de décision V_1 représente environ 91% de la vitesse de rotation V_R .

$$V_1 \approx 0.91 V_R$$
 quadri-moteurs

Pour les bimoteurs, ce rapport semble plus élevé. Nos simulations numériques montrent (Figure 5.1, p. 94) que ce rapport est compris entre 0.96 et 1. Pour un avion de type A330, la vitesse de décision V_1 est de l'ordre de 97% de la vitesse de rotation V_R .

$$V_1 \approx 0.97 V_R$$
 bimoteurs

Mieux encore qu'un ordre de grandeur, nous vous proposons un modèle simple (Table 5.1, p. 95) permettant de déterminer la vitesse de décision V_1 adaptée aux bimoteurs.

REMARQUE 2.5 Nos simulations numériques (Section 4, p. 83) montrent qu'il y a plus de cas de quadrimoteurs (Figure 5.2, p. 96) que de bimoteurs (Figure 5.1, p. 94) qui sont contraints par la limitation $V_1 \leq V_R$. Cela peut s'expliquer par le fait qu'un quadrimoteur est moins limité par la panne moteur pour continuer son accélération et décoller malgré la panne. Sur la figure (Figure 2.12, p. 49) cela se traduit par une pente plus faible de la courbe représentant le décollage OEI malgré la panne. Le croisement des deux courbes RTO et OEI, est donc décalée vers la droite (c'est-à-dire vers des vitesses de panne critique plus élevée). La vitesse de décision est alors contrainte par la limitation de V_R et ne correspond plus aux croisement des deux courbes.

2.2.6 Vitesse de rotation V_R

La vitesse de rotation V_R est la vitesse de roulage à laquelle le pilote tire sur le manche pour entamer la rotation. La roulette de nez se soulève ainsi et l'avion reste encore en contact avec la piste par son train principal jusqu'à la vitesse de décollage V_{LOF} . Cette vitesse dépend de la masse de l'avion, de sa configuration, de l'altitude de la piste, mais une même valeur doit être considérée pour les décollages avec et sans panne moteur (cf. FAR 25.107.e.2)

La norme FAR 25.107.e.1.iv stipule que la vitesse de rotation V_R doit être supérieure à la vitesse pour laquelle, si le taux de rotation q maximal est appliqué, la vitesse de décollage V_{LOF} qui en résulte ne doit pas être inférieure à $1.10 \, V_{mu}$, ou $1.05 \, V_{mu}$ en cas de panne moteur. Elle doit également être supérieure à 1.05 fois la vitesse minimale de contrôle en latéral (FAR 25.107.e): $V_R \geq 1.05 V_{MC}$.

Guy Bousquet [Bou04] donne un encadrement opérationnel :

$$V_{mu} \leq V_R \leq 1.25 V_{S1}$$

"La vitesse V_R donnée dans les fiches de décollage est la vitesse de début de rotation qui doit permettre d'obtenir la vitesse V_2 visée dans un décollage avec panne moteur à V_1 en suivant la loi de rotation moyenne retenue pour le calcul de l'AFM.

Il existe donc une plage opérationnelle de V_R suivant la V_2 visée.

Pour des taux d'accélération correspondants aux conditions de pente minimale réglementaire du 2ème segment⁸, la vitesse de rotation $V_{R\min}$ peut être exprimée en fonction de la vitesse V_{mu} comme suit :

- $V_{R_{\min}} = 1.03 V_{mu}$ pour les modèles A319/A320 (Taux de rotation élevés)
- $-V_{R_{\min}} = 1.01 V_{mu} pour l'A321$
- $V_{R\min} = V_{mu}$ pour les modèles A330/A340 (Taux de rotation faibles)

La V_R maximale pouvant atteindre 1.2 V_{S1} , 1.25 V_{S1} .

- Guy Bousquet [Bou04] -

REMARQUE 2.6 Pour l'A380 [Dan03], la vitesse de rotation représente environ 96% de la vitesse de sécurité au décollage : $V_R=0.96V_2$. Sachant que $V_2\geq 1.08V_{S1}$ (cf. FAR 25.107.b pour un quadri-moteur), cela revient à $V_R\geq 1.04V_{S1}$.

À noter qu'E. Torenbeek [Tor86] p. 325 indique $V_R \ge 1.05V_{S1}$.

Plus qu'un encadrement opérationnel, nous vous proposons un modèle (Table 5.3, p. 102), élaboré à partir de nos simulations numériques, de la vitesse de rotation V_R .

2.2.7 Vitesse de décollage ou lift-off V_{LOF}

La vitesse de décollage V_{LOF} est la vitesse durant le décollage où l'avion quitte complètement la piste.

"The liftoff speed V_{LOF} is defined as the calibrated airspeed at which the airplane first becomes airbone (ie., no contact with the runway). This allows comparison of liftoff speed with tire limit speed. V_{LOF} differs from V_{mu} in that V_{mu} is the minimum possible V_{LOF} speed for a given configuration, and

⁷AFM : Airplane Flight Manual

 $^{^82\}mathrm{\`eme}$ segment : partie de décollage comprise entre le point où le train est entièrement rentré et le passage des 400ft.

depending upon landing gear design, V_{mu} liftoff is shown to be the point where all of the airplane weight is being supported by airplane lift and thrust forces and not any portion by landing gear. For example, after the V_{mu} speed is reached, a truck tilt actuator may force a front or rear wheel set to be in contact with the runway, even though the flyoff is in progress by virtue of lift being greater than weight."

Cette vitesse V_{LOF} diffère selon le cas d'un décollage avec panne moteur ou sans panne moteur. D'après nos simulations numériques⁹ (Section 4, p. 83), la vitesse V_{LOF} sans panne moteur est de l'ordre de 2 à 6% supérieure à celle avec panne moteur.

La norme FAR 25.107.e.1 impose que la vitesse de décollage V_{LOF} , obtenue avec le taux de rotation maximal $q_{\rm max}$ praticable, soit supérieure à $1.10V_{mu}$ (minimum unstick) pour le cas de tous les moteurs opérationnels (AEO All Engines Operating) et $1.05V_{mu}$ pour le cas de panne moteur (OEI One Engine Inoperative).

Dans le cas d'un avion limité géométriquement (c'est-à-dire si l'incidence correspondant au toucher de la queue avec la piste est inférieure à l'incidence de portance maximale), la limitation de la vitesse V_{LOF} sans panne moteur est de $1.08V_{mu}$ au lieu de $1.10V_{mu}$ (cf. AC25-75A), et reste identique $V_{LOF} \geq 1.05V_{mu}$ en cas de panne moteur (ce qui diffère de la JAR 25 qui considère $1.04V_{mu}$ dans ce cas).

"For airplane that are geometry limited, the 110 percent of V_{mu} required by FAR 25.107(e)(1)(iv) may be reduced to an operationally acceptable value of 108 percent on the basis that equivalent airworthiness is provided for the geometry-limited airplane..."

"In the particular case that lift-off is limited by the geometry of the aeroplane or by the elevator power, the above margins may be reduced to 108% in the all-engines operating case and 104% in the one-engine-inoperative condition."

En pratique, Guy Bousquet [Bou04] indique que la V_{LOF} maximale peut atteindre $1.25V_{S1}$ avec panne, $1.3V_{S1}$ sans panne, ce qui revient à un encadrement : Avec une panne moteur (OEI - One Engine Inoperative) :

$$1.05 V_{mu} \le V_{LOF} \le 1.25 V_{S1}$$

Sans panne moteur (AEO - All Engines Operating):

$$1.10 V_{mu} \leq V_{LOF} \leq 1.3 V_{S1}$$

Plus qu'un encadrement opérationnel, nous vous proposons un modèle, élaboré à partir de nos simulations numériques, de la vitesse de décollage "lift-off" V_{LOF} d'un décollage sans panne moteur (Table 5.5, p. 105) et avec panne moteur (Table 5.6, p. 106).

⁹Je n'ai pas trouvé de justification physique de ce phénomène. Entre le cas de panne moteur (OEI) et le cas sans panne moteur (AEO), la vitesse de rotation V_R est identique par définition (cf.FAR 25.107.e.2), mais le pilotage est différent puisque l'assiette de montée visée diffère $\theta_{2,AEO} \geq \theta_{2,OEI}$, et la capacité d'accélération diffère également (terme en $F_{max} \sin \alpha$ dans l'équation de sustentation). Le caractère dynamique de cette phase ne facilite pas non plus l'interprétation physique des équations de dynamique du vol.

2.2.8 Vitesse de tangage q à la rotation et l'arrondi au décollage

La vitesse de tangage q (Figure 2.13, p. 52) est la vitesse angulaire de l'avion par rapport au sol, selon l'axe \overrightarrow{y}_b de l'avion (c'est-à-dire l'axe perpendiculaire au plan de symétrie avion, et orienté vers la droite "sens pilote").

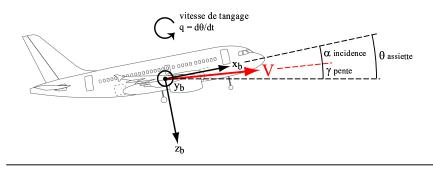


Fig. 2.13 – Vol longitudinal.

Au décollage, le fait que le pilote tire sur le manche δ_m à la vitesse de rotation V_R , va induire une vitesse de tangage q par l'équation de moment, permettant ainsi d'augmenter l'assiette de l'avion jusqu'à la valeur désirée θ_2 (assiette de montée).

La norme avion FAR 25.107.e impose simplement qu'en applicant le taux de rotation maximal possible q_{max} à partir de la vitesse de rotation V_R , la vitesse de décollage V_{LOF} obtenue soit d'au moins $1.10V_{mu}$ sans panne moteur et de $1.05V_{mu}$.

Pour ce qui est de la vitesse de tangage opérationnelle (non maximal), nous n'avons pas d'indications particulières. Afin de clarifier la manière dont évolue la vitesse de tangage q lors de la rotation¹⁰ et de l'arrondi¹¹ au décollage, nous allons faire le bilan de ce que nous avons trouvé dans la littérature à ce sujet.

Des valeurs de vitesses de tangage moyennes sont par exemple données. E.Torenbeek ([Tor86] p.350) annonce un taux de rotation q de 3 à 4°/s pour les avions de transport civil type DC8, B707, B747, et de 4 à 5°/s pour les petits avions de transport civil type F28, BAC1-11.

Jacques Rosay [Ros05] précise que les vitesses de tangage q sont comprises entre $1.5^{\circ}/s \leq q \leq 5^{\circ}/s$, les taux les plus élevés étant pour des petits avions alors que les taux faibles étant pour les gros avions. Pour un avion de transport civil moyen, q est de l'ordre de $3^{\circ}/s$. Il précise que le taux de l'A380 sera de l'ordre de $2^{\circ}/s$ (entre 2 et $3^{\circ}/s$), et que la valeur q à considérer ne sera déterminés qu'à la suite des essais en vol. Il indique également que la queue de l'avion risque de heurter la piste (tail-strike) si q est trop élevée. En pratique, la valeur de q est limitée par les commandes de vol.

Jean-Yves Boiffier [Boi05] (Remarque 2.7, p. 54), indique une vitesse de tangage q identique à la rotation et à l'arrondi, mais différente selon un décollage avec ou sans panne moteur. Pour un B747, $q=3^{\circ}/s$ sans panne moteur et $q=2^{\circ}/s$ avec panne. Pour le B777, $q=2.5^{\circ}/s$ à $3^{\circ}/s$ sans panne moteur et $q=2^{\circ}/s$ avec panne.

Le rapport [Gra00] confirme que les vitesses de tangage q à la rotation sont différentes entre les cas, avec ou sans panne moteur. Il précise même que les taux q sans panne

 $^{^{10}}$ Rotation : phase particulière du roulage au décollage, comprise entre la vitesse de rotation V_R où la roulette de nez quitte le sol, et la vitesse de décollage "lift-off" V_{LOF} où l'avion quitte complètement le sol.

 $^{^{11}{\}rm Arrondi}$: Phase aérienne de transition au décollage, quasi-circulaire, comprise entre la vitesse de décollage V_{LOF} et le début de la phase aérienne de montée rectiligne.

moteur sont généralement de 0.5 à 1°/s supérieurs à ceux avec panne moteur ([Gra00] - p.34). Il indique pour un A340, la vitesse de tangage à la rotation q de :

	AEO	OEI
Taux maximal q_{max}	$3.6^{\circ}/\mathrm{s}$	$2.6^{\circ}/\mathrm{s}$
Taux normal q recommandé	$3.1^{\circ}/\mathrm{s}$	$3.2^{\circ}/\mathrm{s}$
Taux opérationnels habituels q	$1.9^{\circ}/\mathrm{s}$	$1.5^{\circ}/\mathrm{s}$

Il précise que les taux de rotation q opérationnels utilisés habituellement par les pilotes, sont plus faibles que les taux recommandés par le fabriquant. Ceci est principalement dû à leur soucis de décoller sans gêner les passagers, sans taux de rotation élevés causant du facteur de charge.

"Two rates of rotations are defined, the normal one and the maximum practical one, as the rotation is manually done by the pilot. They are used to calculate take-off performances in the Airplane Flight Manual, by defining characteristic speeds. The rotation can be divided into three phases:

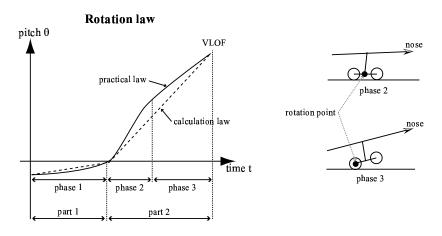


Fig. 2.14 - Rotation law - Jean-François Grandjean [Gra00]

- phase 1: reaction of the aircraft to the pilot action.
- phase 2: rotation (until 6 to 7 degrees) with all the wheels of the main gear on the ground,
- phase 3: rotation with all the wheels of main landing gear (rocking bogie). In order to simplify the pitch attitude law during rotation for the flight manual calculations, a linear law is used. There is one for the first part of rotation corresponding to phase 1, and an another one for the second part including phase 2 and 3. These last two phases are not separated, the difference between them being not significant.

During flight tests, a large number of take-off are performed to establish the normal rate and the maximum practical one, in the AEO and OEI configurations. The normal rate is the average of all the values resulting from the scatter in the tests. The maximum one is chosen between these values in accordance with the aviation authorities."

- Jean-François Grandjean [Gra00] p.23 -

Pour un A330 [Mar05], la vitesse de tangage q est de l'ordre de 0.8° /s à partir de la vitesse de rotation V_R et durant 1.8s, puis de 3.2° /s pour un décollage sans panne moteur $(3^{\circ}$ /s si panne moteur) jusqu'à la vitesse de décollage V_{LOF} .

Les extraits précédents, donnent un ordre de grandeur de la vitesse de tangage q moyenne. Comme l'explique J.-F. Grandjean, la vitesse de tangage q varie en pratique et la valeur moyenne n'est qu'une modélisation (Figure 2.14, p. 53).

Regardons comment évolue en pratique, la vitesse de tangage q durant la rotation et l'arrondi. Le rapport [Dan03] montre (Figure 2.15, p. 55) l'évolution de la vitesse de tangage q en fonction du temps au cours du décollage (simulation d'un A380). Il est ainsi possible d'observer, comme le décrivait J.-F.Grandjean (Figure 2.14, p. 53), qu'à l'amorce de la rotation à V_R , la vitesse de tangage q croît doucement pendant une demie seconde, puis croît plus franchement pendant une bonne seconde, pour rester quasi-constant près de 1.5 secondes, et décroît ensuite. Cette manœuvre à pour conséquence $(q = \dot{\theta})$ de faire croître l'assiette de l'avion θ de l'assiette de roulage θ_r jusqu'à l'assiette de montée θ_2 . Excepté pour des valeurs proches de θ_r ou de θ_2 , cette croissance est quasi-linéaire, ce qui explique que l'on considère une vitesse de tangage moyenne, constante, et identique pour la rotation et pour l'arrondi.

Remarque 2.7 Directives de pilotage AirFrance :

Jean-Yves Boiffier [Boi05], pilote de ligne à AirFrance, nous a expliqué comment, en pratique, était piloté l'avion au cours du décollage. À la vitesse de rotation V_R indiquée par le manuel de vol (AFM Airplane Flight Manuel), le pilote tire sur le manuel de vol : par exemple, pour le B777, de 10° à 12° pour un décollage avec panne, et 15° à 20° sans panne). Ceci amorce la rotation suivi de l'arrondi. Une fois cette assiette de montée atteinte, le pilote conserve cette assiette constante.

Le pilote ne se préoccupe pas de la vitesse de décollage "lift-off" V_{LOF} où l'avion quitte le sol, c'est-à-dire à la fin de la rotation.

La rotation et l'arrondi se font à une même vitesse de tangage q quasi-contante (de l'ordre de 2° /s pour les B747 et B777 au décollage avec panne moteur, et de l'ordre de 2.5° /s à 3° /s pour le B777 et 3° /s pour le B747 pour un décollage sans panne moteur). Le pilote commande la rentrée du train dès que le vario est positif.

Lors de la montée, pour un décollage sans panne moteur, le pilote maintient une vitesse de V_2+10kt (ou V_2+15kt selon les avions). Pour le cas d'un décollage avec panne moteur, la vitesse maintenue en montée est la vitesse de sécurité au décollage V_2 . Toutefois, si la panne moteur apparaît au cours de la montée alors que le pilote maintenait V_2+10kt , la vitesse doit toujours être maintenue^a à V_2+10kt et non pas V_2 .

Finalement, nous considérerons une évolution de la vitesse de tangage q durant les phases de rotation et d'arrondi, de forme trapézoïdale avec le temps (une première phase à $\dot{q}=cte_1$, une deuxième à $q=cte_2$, et une troisième à $\dot{q}=-cte_1$), de sorte que l'assiette aie une loi d'évolution (Table 3.1, p. 74) telle qu'elle est décrite dans la littérature (Figure 2.14, p. 53), (Figure 2.15, p. 55). La partie à vitesse de tangage constante sera considéré à $q=3.6^\circ/s$ pour les bimoteurs et de $2.5^\circ/s$ pour les quadrimoteurs.

^aCette procédure est apparue suite à l'accident d'un DC10 dont la perte d'un moteur sous voilure, a été accompagnée de l'arrachement de becs de l'aile, provoquant une dissymétrie qui n'a pas permis à l'avion de voler à V_2 alors que cela aurait été le cas s'il était resté à $V_2 + 10kt$.

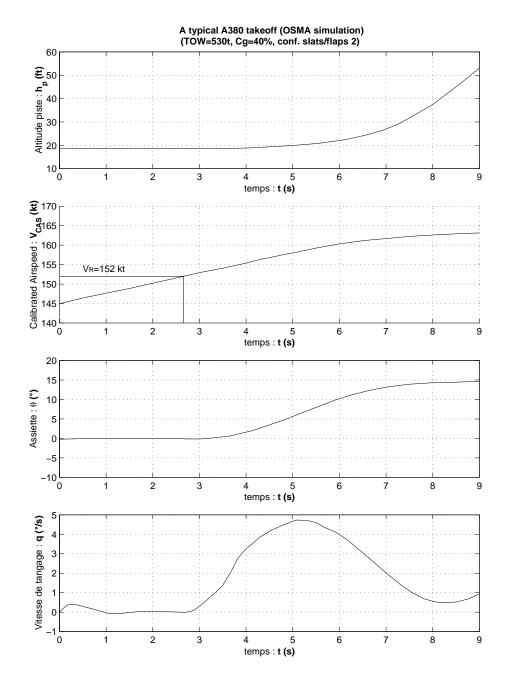


Fig. 2.15 – Courbes proposées par [Dan03] montrant un exemple d'évolution des paramètres avion, durant la rotation et la phase aérienne du décollage d'un A380.

REMARQUE 2.8 La vitesse de tangage des quadrimoteurs est volontairement choisie plus faible pour des raisons de décrochage. L'assiette de montée au décollage θ_2 est quelquefois supérieure à l'angle d'incidence de décrochage. Par conséquent, pour ne pas que l'avion décroche, il faut veiller à ce que la pente γ croissent suffisamment vite (Figure 4.1, p. 90) pour que l'incidence α n'atteigne pas durant la dynamique de la phase aérienne l'incidence de décrochage (Rappelons que $\theta = \gamma + \alpha$.). C'est ce qui a été fait en choisissant une vitesse de tangage plus faible.

2.2.9 Vitesse de sécurité au décollage V_2

Définition

La vitesse de sécurité au décollage V_2 (FAR 25.107.c) est la vitesse permettant de satisfaire au gradient de montée minimal imposé par la norme FAR 25.121.b. C'est-à-dire qu'à V_2 , en cas de panne moteur, quand le train est rentré, le gradient de montée doit être au moins de 2.4% pour les bimoteurs, 2.7% pour les trimoteurs, et 3% pour les quadrimoteurs. Ainsi, la pente minimale γ_{mini} de montée en cas de panne moteur, lorsque le train est rentrée, à V_2 est de :

$$\gamma_{mini} = \begin{cases} \tan^{-1}(0.024) \ rad \approx 1.38^{\circ} & \text{bimoteurs}; \\ \tan^{-1}(0.027) \ rad \approx 1.55^{\circ} & \text{trimoteurs}; \\ \tan^{-1}(0.03) \ rad \approx 1.72^{\circ} & \text{quadrimoteurs}. \end{cases}$$

Cette vitesse doit être atteinte avant le passage de la hauteur de sécurité à $h_s = 35ft$, et, entre 35ft et 400ft, la vitesse de l'avion doit être maintenue à V_2 ou du moins une valeur supérieure proche (FAR 25.111.c.2).

La norme FAR 25.107.b/c impose une marge minimale de sécurité par rapport au décrochage V_{S1} . La vitesse de sécurité au décollage V_2 doit être supérieure à 1.13 V_{S1} (ce qui correspond à $1.2V_S$ de l'ancienne norme) pour les bimoteurs/trimoteurs et $1.08V_{S1}$ pour les quadrimoteurs (au lieu de $1.15V_S$ de l'ancienne norme).

$$V_2 \ge V_{2min} = 1.13 V_{S1}$$
 bi ou trimoteurs
 $\ge V_{2min} = 1.08 V_{S1}$ quadrimoteurs

Ainsi la vitesse de sécurité au décollage est égale au maximum de la vitesse $V_{2\gamma_{mini}}$ permettant le gradient minimal de montée et de la vitesse minimale V_{2min} .

$$V_2 = \max\left(V_{2\gamma_{mini}}, V_{2min}\right)$$

Encadrement opérationnel

Guy Bousquet [Bou04] précise que la vitesse de sécurité au décollage V_2 n'excède pas opérationnellement 1.25 à 1.3 fois la vitesse de décrochage V_{S1} .

L'ordre de grandeur de l'encadrement de la vitesse de sécurité au décollage V_2 est : Pour les bi ou trimoteurs

$$1.13 \le \frac{V_2}{V_{S1}} \le 1.3$$

Pour les quadrimoteurs

$$1.08 \le \frac{V_2}{V_{S1}} \le 1.3$$

C'est appréciable d'avoir en tête un ordre de grandeur de l'encadrement de la vitesse de sécurité au décollage V_2 , mais nous allons encore faire mieux en la calculant analytiquement à l'aide des équations de dynamique du vol à l'équilibre.

Calcul de la vitesse $V_{2\gamma_{min}}$ de pente minimale de montée

En reprenant la définition de la norme FAR 25.107.c, on peut déduire l'expression de la vitesse de sécurité $V_{2\gamma_{mini}}$ correspondant à l'équilibre, train rentré, avec panne moteur, à la pente minimale exigée : $\gamma_{mini} = \tan^{-1}\left(\frac{2.4}{100}\right)$ pour un bimoteur ($\gamma_{mini} = \tan^{-1}\left(\frac{2.7}{100}\right)$ pour un trimoteurs, et $\gamma_{mini} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{100}\right)$ pour un quadrimoteurs).

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & -\gamma_{mini}mg - \frac{1}{2}\rho S{V_2}^2{}_{\gamma_{mini}}Cx_2 + \frac{N_m - 1}{N_m}F_{max}(V_2{}_{\gamma_{mini}}) \\ \\ 0 & = & mg - \frac{1}{2}\rho S{V_2}^2{}_{\gamma_{mini}}Cz_2 \\ \\ Cz_2 & = & Cz_{\alpha}\left(\alpha_2 - \alpha_0\right) \\ Cx_2 & = & Cx_o + \Delta Cx_{omoulinet} + k_i Cz_2^2 \\ \\ \theta_2 & = & \alpha_2 + \gamma_{mini} \end{array}$$

La première équation (équation de propulsion), rapportée à la deuxième équation (équation de sustentation), avec l'aide des troisième et quatrième équations définissant les coefficients aérodynamiques, permet d'aboutir à un polynôme d'ordre 2 en α_2 :

$$\begin{split} \frac{N_m-1}{N_m}\frac{F_{max}(V_{2\gamma_{mini}})}{mg} &= \frac{Cx_2}{Cz_2} + \gamma_{mini} \\ &= \frac{Cx_o + \Delta Cx_{omoulinet} + k_i Cz\alpha^2 \left(\alpha_2 - \alpha_0\right)^2}{Cz\alpha \left(\alpha_2 - \alpha_0\right)} + \gamma_{mini} \\ 0 &= A_\alpha \left(\alpha_2 - \alpha_0\right)^2 + B_\alpha \left(\alpha_2 - \alpha_0\right) + C_\alpha \\ A_\alpha &= k_i Cz\alpha^2 \\ B_\alpha &= -\left(\frac{\frac{N_m-1}{N_m}F_{max}(V_{2\gamma_{mini}})}{mg} - \gamma_{mini}\right)Cz\alpha \\ C_\alpha &= Cx_o + \Delta Cx_{omoulinet} \end{split}$$

ce qui permet d'aboutir à

$$\alpha_{2} = \alpha_{0} + \frac{-B_{\alpha} + \sqrt{B_{\alpha}^{2} - 4A_{\alpha}C_{\alpha}}}{2A_{\alpha}}$$

$$V_{2\gamma_{mini}} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SCz_{\alpha}(\alpha_{2} - \alpha_{0})}}$$

$$\theta_{2} = \alpha_{2} + \gamma_{mini}$$

REMARQUE 2.9 La résolution des équations d'équilibre, aboutissent à deux solutions en incidence α , qui correspondent aux deux régimes de vol, obtenues par l'intersection des courbes de traînée et de poussée en fonction de la vitesse. La solution qui correspond au décollage, est celle du 2ème régime. L'incidence α_2 est prise égale à la racine $\frac{-B_{\alpha}+\sqrt{B_{\alpha}^2-4A_{\alpha}C_{\alpha}}}{2A_{\alpha}}$ et non pas à $\frac{-B_{\alpha}-\sqrt{B_{\alpha}^2-4A_{\alpha}C_{\alpha}}}{2A_{\alpha}}$ car elle doit être égale à la racine la plus élevée. En effet, au décollage les vitesses sont les plus faibles possibles. La vitesse de sécurité au décollage V_2 est inférieure à la vitesse de finesse maximale (Figure B.1, p. 301). Ce qui veut dire que les incidences sont les plus élevées. Le coefficient A_{α} étant forcément positif, la racine la plus élevée est bien celle en $\frac{-B_{\alpha}+\sqrt{B_{\alpha}^2-4A_{\alpha}C_{\alpha}}}{2A_{\alpha}}$.

L'expression de la vitesse de sécurité au décollage $V_{2\gamma_{mini}}$ contrainte par la pente minimale de montée, peut donc se déduire analytiquement à condition de supposer la poussée

maximale à $V_{2\gamma_{min}}$ connue. En pratique, on sait qu'à des vitesses de décollage, pour un avion de transport civil (taux de dilution moteur élevé $\lambda \approx 6$), la perte de poussée par rapport au point fixe est de l'ordre de 80%. Une autre méthode pour connaître l'ordre de grandeur de cette poussée maximale est de calculer la poussée maximale à la vitesse $V_{2min} = 1.13V_{S1}$.

Pour une résolution numérique, un bouclage sera fait pour obtenir la poussée maximale $F_{max}(V_{2\gamma_{mini}})$ correspondant à la vitesse $V_{2\gamma_{mini}}$ recherchée.

Pour un A300, en configuration de décollage, la vitesse de sécurité ainsi calculée est de 87.3m/s, soit $1.16V_{S1}$.

Si le précédent calcul de $V_{2\gamma_{mini}}$ aboutissait à la vitesse inférieure à la vitesse de sécurité minimale $V_{2min}=1.13V_{S1}$ imposée par la norme FAR 25.107, il faut considérer la vitesse de sécurité au décollage $V_2=1.13V_{S1}$ (ou $1.08V_{S1}$ pour un quadrimoteur).

Modèle de la vitesse de sécurité au décollage V_2 .

$$V_2 = \max\left(V_{2\gamma_{mini}}, V_{2min}\right)$$

$$V_{2min} = \begin{cases} 1.13 \, V_{S1} & \text{pour les bi et tri-moteurs;} \\ 1.08 \, V_{S1} & \text{pour les quadri-moteurs.} \end{cases}$$

$$V_{2\gamma_{mini}} = \sqrt{\frac{Cz_{max}}{Cz_{\alpha} \left(\frac{-B_{\alpha} + \sqrt{B_{\alpha}^2 - 4A_{\alpha}C_{\alpha}}}{2A_{\alpha}}\right)}} V_{S1}$$

$$A_{\alpha} = k_i \, Cz_{\alpha}^2$$

$$B_{\alpha} = \left(\gamma_{mini} - \frac{N_m - 1}{N_m} \frac{F_{max}(V_2)}{mg}\right) Cz_{\alpha}$$

$$C_{\alpha} = (Cx_o + \Delta Cx_{omoulinet})$$

$$\gamma_{mini} = \begin{cases} \tan^{-1}(0.024) & \text{pour les bi-moteurs} \\ \tan^{-1}(0.027) & \text{pour les tri-moteurs} \\ \tan^{-1}(0.03) & \text{pour les quadri-moteurs} \end{cases}$$

Mode d'obtention : Analytique à partir de la définition de la vitesse de sécurité au décollage V_2 donnée par la FAR 25.

Domaine de définition : Avions soumis à la FAR 25.

Précision: Modèle élaboré par résolution analytique exacte.

Variables:

Symboles : Désignation	Unités
Cz_{α} : Gradient de coefficient de portance avec l'incidence	rad^{-1}
Cz_{max} : Coefficient de portance maximale, au delà il y a décrochage. At-	
tention sa valeur dépend de la configuration des becs/volets	
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il	
dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.	
$F_{max}(V_2)$: Poussée maximale, que délivrerait l'ensemble des N_m moteurs	N
équipant l'avion, à la vitesse V_2 . Afin d'éviter un bouclage	
numérique, cette poussée peut être évaluée à V_{2min} ce qui est	
justifié car en général $V_2 = V_{2min}$.	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 m/s^2$	m/s^2
k_i : Coefficient de traînée induite $k_i \approx \frac{1}{\pi \lambda}$,
m : Masse maximale de l'avion au décollage (M_{MTOW} ici notée m	kg
pour ne pas alourdir l'écriture des équations)	J
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage. Vitesse supérieure à V_{2min} (FAR	m/s
25.107.c), et à laquelle la pente minimale γ_{mini} de montée (avec	,
panne OEI et avec train rentré) doit être satisfaite (FAR 25.121.b)	
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale, $1.13V_{S1}$ pour les bi et	m/s
tri-moteurs et $1.08V_{S1}$ pour les quadri-moteurs (FAR 25.107.b)	,
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s
α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de	rad
la configuration Bec/Volet adoptée.	
$\Delta Cx_{omoulinet}$: Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au mo-	
teur en panne qui tourne en "moulinet"	

Tab. 2.6 – Modèle analytique de la vitesse de sécurité au décollage V_2

2.2.10 Assiette de montée au décollage θ_2

L'assiette θ_2 est l'assiette de montée au décollage. Elle représente l'objectif que cherche à atteindre le pilote en tirant sur le manche dès la rotation. Une fois atteinte, cette assiette est maintenue durant la montée du décollage.

Cette assiette permet à l'avion, une fois le train rentré, d'obtenir une vitesse à l'équilibre de V_2 (vitesse de sécurité au décollage), comme l'exige la norme avion FAR 25.121.(b).

REMARQUE 2.10 D'un point de vue opérationnel, au cours d'un décollage sans panne moteur, la vitesse est maintenue à une valeur $V_2+10\ kt$ légèrement supérieure à la vitesse de sécurité au décollage, comme l'explique le pilote Air France Jean-Yves Boiffier (Remarque 2.7, p. 54). Ce critère de maintien de vitesse est peut-être dû au bruit puisqu'il se retrouve dans la norme FAR relative au bruit.

"The takeoff reference speed is the all-engine operating takeoff climb speed selected by the applicant for use in normal operation; this speed must be at least $V_2 + 10kt$ ($V_2 + 19km/h$) but may not be greater than $V_2 + 20kt$ ($V_2 + 37km/h$). This speed must be attained as soon as practicable after lift-off and be maintained throughout the takeoff noise certification test. For Concorde airplanes, the test day speeds and the acoustic day reference speed are the minimum approved value of $V_2 + 35$ knots, or the all-engines-operating speed at 35 feet, whichever speed is greater as determined under the regulations constituting the type certification basis of the airplane; this reference speed may not exceed 250 knots. For all airplanes, noise values measured at the test day speeds must be corrected to the acoustic day reference speed."

- $FAR^a 36.B.b.(4)$ -

Pour notre étude, nous ne tiendrons pas compte de ces critères opérationnels de limitation de bruit au voisinage des aéroports. Nous considérerons le cas limite de certification, c'est-à-dire une assiette de montée θ_2 qui correspond à une montée en équilibre à la vitesse de sécurité au décollage V_2 . Cela dit, étant donnée la dynamique de la phase aérienne du décollage, sans panne moteur, la vitesse obtenue au passage de la hauteur de sécurité, est supérieure à la V_2 : de l'ordre de 7 à 15 kt supplémentaire pour l'ensemble de nos simulations numériques (Section 4, p. 83),

 $^a{\rm FAR36}$ Noise standards : Aircraft type and airworthiness certification. Appendix B : Noise Levels for Transport Category and Jet Airplanes Under Sec. 36.103. http://www.airweb.faa.gov/

La valeur de cette assiette θ_2 est différente selon le cas d'un décollage avec ou sans panne moteur. Elle est plus élevée dans le cas d'un décollage sans panne que dans le cas d'un décollage avec panne moteur, si bien que si une panne apparaissait au cours de la phase aérienne du décollage, le pilote n'aurait qu'à rendre du manche pour maintenir la vitesse V_2 . Par exemple, pour un B747 de 360 tonnes au décollage, le manuel de vol¹² indique une assiette de montée de 13° sans panne moteur, et de 11° avec panne moteur.

L'expression analytique de l'assiette de montée θ_2 se déduit des équations de la dy-

¹²Manuel d'exploitation AirFrance : Manuel d'utilisation B747. Avril 1983.

namique du vol appliquées à l'avion, en équilibre à la vitesse V_2 de sécurité au décollage.

$$mg = \frac{1}{2}\rho SV_2^2 Cz_2$$

$$F_{max}(V_2) = \frac{1}{2}\rho SV_2^2 Cx_2 + mg\gamma_2$$

$$Cz_2 = Cz\alpha (\alpha_2 - \alpha_0)$$

$$Cx_2 = Cx_o + \Delta Cx_o + k_i Cz_2^2$$

$$\theta_2 = \alpha_2 + \gamma_2$$

Ce calcul diffère de celui effectué dans le paragraphe précédent qui consistait à déterminer la vitesse de sécurité au décollage V_2 , puisque cette fois-ci, il n'y a pas forcément de panne moteur. Il y aura donc une valeur d'assiette de montée pour le décollage sans panne moteur (AEO) où on considérera la poussée F_{max} et pas d'augmentation de coefficient de traînée $\Delta Cx_o = 0$, et une assiette de montée pour le décollage avec panne moteur (OEI) où une poussée $\frac{N_m-1}{N_m}F_{max}$ et une traînée due au moteur en panne $\Delta Cx_o = \Delta Cx_{omoulinet}$ seront considérés.

REMARQUE 2.11 En cas de panne moteur (OEI One Engine Inoperative), par définition (Table 2.6, p. 59), la pente d'équilibre γ_2 est égale à la pente minimale γ_{mini} de montée exigée par la norme FAR 25.121.b, si la vitesse de sécurité au décollage n'est pas contrainte $V_2 > V_{2min} = 1.13V_{S1}$.

Dans le cas d'une vitesse de sécurité au décollage contrainte $V_2 = V_{2min}$, alors la pente d'équilibre γ_2 est supérieure à la pente minimale γ_{mini} .

En utilisant la définition de la vitesse V_{S1} de décrochage à 1-g, $mg = \frac{1}{2}\rho SV_{S1}^2Cz_{max}$, les équations précédentes permettent d'exprimer les paramètres de l'avion à l'équilibre, en fonction du rapport $\frac{V_2}{V_{S1}}$ précédemment déterminé (Table 2.6, p. 59) :

$$Cz_{2} = \left(\frac{V_{S1}}{V_{2}}\right)^{2} Cz_{max}$$

$$\alpha_{2} = \left(\frac{V_{S1}}{V_{2}}\right)^{2} \alpha_{max} + \left(1 - \left(\frac{V_{S1}}{V_{2}}\right)^{2}\right) \alpha_{0}$$

$$Cx_{2} = Cx_{o} + \Delta Cx_{o} + k_{i} \left(\frac{V_{S1}}{V_{2}}\right)^{4} Cz_{max}^{2}$$

$$\gamma_{2} = \frac{F_{max}(V_{2})}{mg} - \left(\frac{V_{2}}{V_{S1}}\right)^{2} \frac{Cx_{o} + \Delta Cx_{o} + k_{i} \left(\frac{V_{S1}}{V_{2}}\right)^{4} Cz_{max}^{2}}{Cz_{max}}$$

REMARQUE 2.12 La plupart des avions ont une vitesse de sécurité au décollage V_2 contrainte par la vitesse minimale (1.13 V_{S1} pour les bimoteurs) exigée par la norme FAR 25.107(b/c). Dans ce cas $V_2 = 1.13V_{S1}$, cela revient à :

$$Cz_{2} = 78.3\% Cz_{max}$$

$$\alpha_{2} = 0.217 \alpha_{0} + 0.783 \alpha_{max}$$

$$Cx_{2} = Cx_{o} + \Delta Cx_{o} + 0.613 k_{i}Cz_{max}^{2}$$

$$\gamma_{2} = \frac{F_{max}(V_{2})}{mg} - 1.277 \frac{Cx_{o} + \Delta Cx_{o} + 0.613 k_{i}Cz_{max}^{2}}{Cz_{max}}$$

REMARQUE 2.13 L'assiette θ_2 , atteinte à l'équilibre défini par la vitesse de sécurité au décollage V_2 , sera utilisée pour notre loi de pilotage du décollage : loi d'assiette (Table 3.1, p. 74). Elle représente l'objectif à atteindre et à maintenir durant la phase aérienne du décollage.

rad

Modèle de l'assiette objectif θ_2 de la loi de pilotage en assiette (Table 3.1, p. 74).

$$\begin{array}{rcl} \theta_2 & = & \alpha_2 + \gamma_2 \\ \\ \alpha_2 & = & \alpha_0 + \left(\frac{V_{S1}}{V_2}\right)^2 \frac{Cz_{max}}{Cz_{\alpha}} \end{array}$$

En cas de panne moteur (OEI : One Engine Inoperative) :

$$\gamma_2 = \frac{N_m - 1}{N_m} \frac{F_{max}(V_2)}{mg} - \left(\frac{V_2}{V_{S1}}\right)^2 \frac{Cx_o + \Delta Cx_{omoulinet} + k_i \left(\frac{V_{S1}}{V_2}\right)^4 Cz_{max}}{Cz_{max}}$$

Sans panne moteur (AEO: All Engines Operating):

$$\gamma_2 = \frac{F_{max}(V_2)}{mg} - \left(\frac{V_2}{V_{S1}}\right)^2 \frac{Cx_o + k_i \left(\frac{V_{S1}}{V_2}\right)^4 Cz_{max}^2}{Cz_{max}}$$

Mode d'obtention : Analytique. Correspond à l'état d'équilibre à la vitesse V_2 (Table 2.6, p. 59), train rentré, avec ou sans panne moteur.

Domaine de définition: Avions soumis à la FAR 25.

Précision : Modèle élaboré par résolution analytique exacte des équations de dynamique du vol à l'équilibre, selon la définition de la norme FAR 25.107.c.

Variables Symboles: Désignation Unités Cx_o : Coefficient de traı̂née de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. Cz_{max} : Coefficient de portance maximale, au delà il y a décrochage. Attention sa valeur dépend de la configuration des becs/volets rad^{-1} Cz_{α} : Gradient de coefficient de portance avec l'incidence $F_{max}(V_2)$: Poussée maximale (Equation 3.1, p. 68), que délivrerait l'ensemble des ${\cal N}_m$ moteurs équipant l'avion, à la vitesse V_2 . Afin d'éviter un bouclage numérique, cette poussée peut être évaluée à V_{2min} ce qui est justifié car en général $V_2 = V_{2min}.$ g: Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$ m/s^2 k_i : Coefficient de traînée induite $k_i \approx \frac{1}{\pi \lambda}$ m: Masse maximale de l'avion au décollage (M_{MTOW} ici kqnotée m pour ne pas alourdir l'écriture des équations) ${\cal N}_m$: Nombre de moteurs équipant l'avion (à ne pas confondre avec le nombre de moteur en état de fonctionnement). V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59). V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1-g (Equation 2.1, p. 32) m/s

dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. $\Delta Cx_{omoulinet}: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due} \\ \text{au moteur en panne qui tourne en "moulinet"}$

Tab. 2.7 – Modèle de l'assiette de montée au décollage θ_2

 α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle

2.2.11 Vitesse finale au décollage V_{FTO}

La vitesse finale au décollage V_{FTO} est la vitesse maintenue dans la configuration "in route configuration" jusqu'à 1500ft, et qui permet de satisfaire au gradient de montée minimal exigé par la FAR 25.121(c). Cette vitesse doit être (cf.FAR 25.107.g) supérieure ou égale à $1.24V_{S1}$.

$$V_{FTO} \ge 1.24 V_{S1}$$

La définition de cette vitesse est donnée à titre indicatif, car elle n'est pas utile à la détermination de la longueur de piste au décollage.

2.2.12 Hauteur de sécurité h_s

La hauteur de sécurité h_s est la hauteur au dessus de la piste à laquelle l'avion termine son décollage ou débute son atterrissage (pour la détermination de la longueur de piste parcourue). La hauteur de sécurité h_s est de $h_s = 50 ft = 15.2 m$ à l'atterrissage d'après la FAR 25.125, et de $h_s = 35 ft = 10.7 m$ au décollage ($h_s = 15 ft = 4.6 m$ si la piste est mouillée) d'après la FAR 25.113.

2.2.13 Pente minimale γ_{mini}

Par sécurité, la norme FAR 25.121 impose plusieurs gradients de montée minimal durant les phases aériennes du décollage et atterrissage.

"FAR 25.121 : Climb : One-engine-inoperative.

- (a) Takeoff; landing gear extended. In the critical takeoff configuration existing along the flight path (between the points at which the airplane reaches V_{LOF} and at which the landing gear is fully retracted) and in the configuration used in Sec. 25.111 but without ground effect, the steady gradient of climb must be positive for two-engine airplanes, and not less than 0.3 percent for three-engine airplanes or 0.5 percent for four-engine airplanes, at V_{LOF} and with-
 - (1) The critical engine inoperative and the remaining engines at the power or thrust available when retraction of the landing gear is begun in accordance with Sec. 25.111 unless there is a more critical power operating condition existing later along the flight path but before the point at which the landing gear is fully retracted; and
 - (2) The weight equal to the weight existing when retraction of the landing gear is begun, determined under Sec. 25.111.
- (b) Takeoff; landing gear retracted. In the takeoff configuration existing at the point of the flight path at which the landing gear is fully retracted, and in the configuration used in Sec. 25.111 but without ground effect, the steady gradient of climb may not be less than 2.4 percent for two-engine airplanes, 2.7 percent for three-engine airplanes, and 3.0 percent for four-engine airplanes, at V₂ and with-
 - (1) The critical engine inoperative, the remaining engines at the takeoff power or thrust available at the time the landing gear is fully retracted, determined under Sec. 25.111, unless there is a more critical

power operating condition existing later along the flight path but before the point where the airplane reaches a height of 400 feet above the takeoff surface; and

- (2) The weight equal to the weight existing when the airplane's landing gear is fully retracted, determined under Sec. 25.111.
- (c) [Final takeoff. In the en route configuration at the end of the takeoff path determined in accordance with Sec. 25.111, the steady gradient of climb may not be less than 1.2 percent for two-engine airplanes, 1.5 percent for three-engine airplanes and 1.7 percent for four-engine airplanes, at V_{FTO} and with-]
 - (1) The critical engine inoperative and the remaining engines at the available maximum continuous power or thrust; and
 - (2) The weight equal to the weight existing at the end of the takeoff path, determined under Sec. 25.111.
- (d) [Approach. In a configuration corresponding to the normal all-enginesoperating procedure in which V_{SR} for this configuration does not exceed 110 percent of the V_{SR} for the related all-engines-operating landing configuration, the steady gradient of climb may not be less than 2.1 percent for two-engine airplanes, 2.4 percent for three-engine airplanes, and 2.7 percent for four-engine airplanes, with-]
 - (1) The critical engine inoperative, the remaining engines at the goaround power or thrust setting;
 - (2) | The maximum landing weight;
 - (3) A climb speed established in connection with normal landing procedures, but not more than $1.4 V_{SR}$; and
 - (4) Landing gear retracted.]

Amdt. 25-108, Eff. 12/26/2002"

- FAR 25.121 : Climb : One-engine-inoperative. [FAA03] - Cela revient à imposer une contrainte minimale sur la pente γ :

	Décollage avec panne (OEI)			
	1er segment	2ème segment		
	dès V_{LOF} ,	à V_2 , dès que le train		
	train sorti	est rentré jusqu'à 400ft		
bimoteur	$\gamma \geq 0$	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.024 \ rad \approx 1.37^{\circ}$		
trimoteur	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.003 rad \approx 0.17^{\circ}$	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.027 rad \approx 1.55^{\circ}$		
quadrimoteur	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.005 \ rad \approx 0.29^{\circ}$	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.030 \ rad \approx 1.72^{\circ}$		

	Décollage avec panne (OEI)	Atterrissage sans panne (AEO)
	final	Approche
	à V_{FTO} , in route	à $1.4V_{S1}$,
	configuration, jusqu'à 1500ft	train rentré
bimoteur	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.012 rad \approx 0.69^{\circ}$	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.021 \ rad \approx 1.20^{\circ}$
trimoteur	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.015 rad \approx 0.86^{\circ}$	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.024 rad \approx 1.37^{\circ}$
quadrimoteur	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.017 \ rad \approx 0.97^{\circ}$	$\gamma \ge \tan^{-1} 0.027 \ rad \approx 1.55^{\circ}$

Nous notons γ_{mini} la pente correspondant au gradient de montée minimal exigé par la norme FAR 25.121.b au 2ème segment, c'est-à-dire à la vitesse de sécurité au décollage V_2 , dès que le train est rentré et jusqu'à 400ft.

$$\gamma_{mini} = \begin{cases} \tan^{-1} 0.024 \, rad \approx 1.37^{\circ} & \text{pour les bimoteurs} \\ \tan^{-1} 0.027 \, rad \approx 1.55^{\circ} & \text{pour les trimoteurs} \\ \tan^{-1} 0.030 \, rad \approx 1.72^{\circ} & \text{pour les quadrimoteurs} \end{cases}$$

2.2.14 Vitesse d'approche à l'atterrissage V_{REF}

La vitesse d'approche à l'atterrissage V_{REF} , qui est maintenue jusqu'au passage de la hauteur de sécurité $h_s = 50 ft$, doit être (cf.FAR 25.125.a) supérieure ou égale à $1.23 V_{S1}$ (où V_{S1} est la vitesse de décrochage en configuration d'atterrissage), et à la vitesse minimale de contrôle d'atterrissage V_{MC} .

$$V_{REF} \ge 1.23 \, V_{S1}$$

2.2.15 Vitesse de toucher des roues "touchdown" à l'atterrissage V_{TD}

La vitesse V_{TD} , est la vitesse durant l'atterrissage à laquelle les roues de l'avion touchent la piste. Cette vitesse est inférieure à la vitesse d'approche à l'atterrissage V_{REF} : $V_{TD} \leq V_{REF}$. Le guide des essais en vol pour la certification d'avions de transport civil AC25-7A (Chapitre 1, section 2.19.b.1 [FAA98]), indique qu'en pratique la vitesse de toucher des roues V_{TD} est d'environ 3 kt inférieur à la vitesse d'approche à l'atterrissage V_{REF} .

$$V_{TD} \approx V_{REF} - 3 kt$$

Chapitre 3

Modélisation des équations du décollage

Sommaire

3.1	Mod	délisation des efforts appliqués à l'avion	68
	3.1.1	La poussée des moteurs	68
	3.1.2	La portance et la traînée	69
	3.1.3	Le Poids	70
	3.1.4	La réaction au sol	70
3.2	\mathbf{Loi}	d'assiette, ou comment piloter la rotation et l'arrondi?	71
3.3	Équ	ations du décollage issues du Principe Fondamental de	
	la D	ynamique	7 5

Les équations de la dynamique du vol de l'avion au décollage vont être exposées dans ce chapitre. C'est à partir de ces équations, que vont être bâties nos simulations numériques (Section 4, p. 83).

Pour obtenir ces équations, le principe fondamental de la dynamique (PFD) est utilisé, sur le système avion (de masse m supposée constante (Remarque 3.1, p. 70)), dans le référentiel terrestre supposé Galiléen. Ce dernier consiste à étudier la somme des forces appliquées à l'avion qui est égale au produit de la masse avion m et de l'accélération Γ de l'avion en son centre de gravité G par rapport à la terre, et à étudier la somme des moments égale au moment dynamique en G. Les équations cinématiques sont aussi utilisées

Les modèles des efforts appliqués à l'avion seront d'abord rappelés. Puis, comme le décollage dépend de la manière dont est piloté l'avion, nous exposerons la loi de pilotage considérée, représentative des directives de pilotage AirFrance (Remarque 2.7, p. 54). Ceci nous permettra ensuite d'établir les équations du décollage.

3.1 Modélisation des efforts appliqués à l'avion

Les efforts appliqués à l'avion sont de plusieurs natures : les efforts propulsifs, aérodynamiques, massique, et de contact avec la piste.

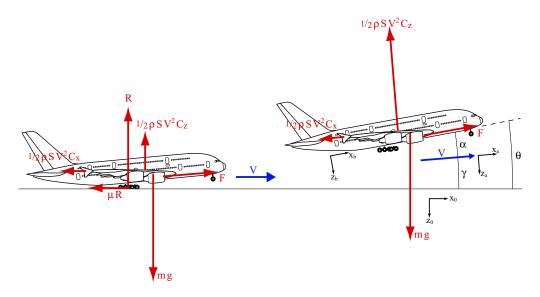


Fig. 3.1 – Forces appliquées à l'avion au décollage

3.1.1 La poussée des moteurs

La modélisation de la poussée moteur a été choisie pour être précise en dépit d'une expression analytique sophistiquée. Elle est de la forme :

$$F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2 \right) \tag{3.1}$$

Symboles : Désignation	Unités
F_0 : Poussée au point fixe (à vitesse et altitude nulles) de tous les	N
moteurs équipant l'avion	
q_1, q_2 : Coefficients: $q_1 = -2.9410^{-3} s/m, q_2 = 4.3310^{-6} s^2/m^2$, d'après	$(m/s)^{-1}$ et $(m/s)^{-2}$
J.Mattingly [Mat96], et $q_1 = 2.2310^{-3} s/m$, $q_2 = 3.0310^{-6} s^2/m^2$	
d'après notre modèle [Rou02] pour un moteur civil moyen (taux	
de dilution $\lambda = 5$, taux de compression $\varepsilon_c = 30$, température	
d'entrée turbine $T_4 = 1500 K$)	
V: Vitesse de l'avion par rapport à l'air.	m/s
ρ : Masse volumique de l'air à l'altitude de la piste	kg/m^3
ρ_0 : Masse volumique de l'air à altitude nulle $\rho_0=1.225kg/m^3$	kg/m^3

C'est la forme analytique des modèles moteurs civils que nous avons mis au point [Rou02], qui est représentative du comportement moteur (notre modèle moteur a une précision de l'ordre du pour-cent par rapport aux données de moteurs civils de la famille des CFM56). Elle procure également l'avantage notable d'offrir la possibilité d'études futures du choix optimal des moteurs puisque nous avons élaboré les modèles des coefficients q_1 et q_2 en fonction des paramètres moteurs (taux de dilution, taux de compression, température d'entrée turbine...). La détermination du taux de dilution optimal pourra être désormais envisagée.

La complexité analytique de la forme de la poussée que nous avons adoptée, ne facilite certes pas la résolution analytique du décollage, notamment au roulage. Nous y sommes quand même parvenu, ce qui permet une résolution de la longueur de piste au décollage avec un modèle moteur précis.

Pour les cas de freinage au cours d'un décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) ou pour un atterrissage, la poussée n'est pas maximale, les moteurs sont au régime ralenti. Dans ce cas, la poussée de ralenti F_{red} sera considérée à la place de la poussée au point fixe F_0 dans l'expression analytique précédente. À noter que cette poussée F_{red} peut être considérée négative en cas de réverse mais seulement pour le calcul du freinage d'un décollage interrompu (RTO) sur piste mouillée ou enneigée. La réverse n'est pas tolérée dans la certification des autres cas de freinage (RTO piste sèche ou atterrissage).

La définition de F_0 étant la poussée au point fixe (vitesse et altitude nulles) des N_m moteurs équipant l'avion, si l'un des moteurs tombe en panne, il sera ajouté un terme $\frac{N_m-1}{N_m}$ en facteur de l'expression analytique de la poussée précédemment donnée.

Nous supposerons la poussée moteur dirigée selon l'axe de révolution du fuselage \overrightarrow{x}_b .

3.1.2 La portance et la traînée

Les efforts aérodynamiques de portance $-\frac{1}{2}\rho \ V_a^2SCz \overrightarrow{z}_a$ et de traînée $-\frac{1}{2}\rho \ V_a^2SCx \overrightarrow{x}_a$ sont modélisés dans le repère aérodynamique lié à la vitesse de l'avion par rapport à l'air. Les coefficients de portance et de traînée sont classiquement modélisés par la polaire de l'avion :

$$Cz = Cz_{\alpha} (\alpha - \alpha_0) + (\Delta Cz_{oSP}) \leq Cz_{max}$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + (\Delta Cx_{omoulinet}) + (\Delta Cx_{oSP}) + k_i Cz^2$$

Symboles: Désignation Unités Cx: Coefficient de traînée avion Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. Cz: Coefficient de portance avion Cz_{max} : Coefficient de portance maximale, au delà il y a décrochage. Attention sa valeur dépend de la configuration des becs/volets rad^{-1} Cz_{α} : Gradient de coefficient de portance avec l'incidence k_i : Coefficient de traînée induite $k_i \approx \frac{1}{\pi \lambda}$ α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la confi radguration Bec/Volet adoptée. α : Incidence de l'avion rad $\Delta Cx_{omoulinet}$: Augmentation du coefficient de traı̂née de frottement due au moteur en panne qui tourne en "moulinet" ΔCx_{oSP} : Augmentation du coefficient de traînée de frottement due à la sortie des ΔCx_{oTrain} : Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train sorti. ΔCz_{oSP} : Augmentation du coefficient de portance due à la sortie des spoilers.

Les coefficients d'augmentation de traînée de frottement ΔCx_{oSP} et de portance ΔCz_{oSP} due au spoilers sont bien évidemment considérés comme nuls quand les spoilers ne sont pas déployés. De même, le coefficient d'augmentation de traînée de frottement $\Delta Cx_{omoulinet}$ due au moteur en panne qui tourne en "moulinet" n'est pas pris en compte s'il n'y a pas de panne moteur. Par contre, l'augmentation du coefficient de traînée de frottement ΔCx_{oTrain} due au train d'atterrissage est toujours pris en compte car, comme nous l'avons montré (Appendix B.2, p. 302), le train n'a pas le temps de rentrer avant le passage de la hauteur de sécurité h_s .

3.1.3 Le Poids

L'avion de masse m est soumis à son poids $mg \vec{z}_o$, produit de sa masse et de la constante de gravité terrestre $(g = 9.81 \, m/s^{-2})$, porté par la verticale terrestre \vec{z}_o .

REMARQUE 3.1 Pour l'étude du décollage/atterrissage, la masse de l'avion peut être considérée constante. En effet, prenons un avion ayant un taux de propulsion moyen de $\frac{F_0}{M_{MTOWg}} = 0.3$ ce qui est typique des bimoteurs [Boi01a], avec une consommation spécifique au point fixe de $C_{SR} = 1.11 \ 10^{-5} \ (kg/s)/N$ ce qui est le cas des moteurs civils moyens [Rou02]. En supposant que la poussée et la consommation spécifique restent constantes, la masse de carburant consommé durant un décollage de temps t_p est égale à :

$$M_{Fuel\, \text{consomm\'e}} = C_{SR} \, F_0 \, t_p$$

Ainsi la variation de masse entre le début du décollage M_{MTOW} et la fin du décollage $M_{MTOW}-M_{Fuel\,{
m consomm\'e},}$ est :

$$\frac{\Delta M_{MTOW}}{M_{MTOW}} = \frac{M_{MTOW} - (M_{MTOW} - M_{Fuel \text{consomm\'e}})}{M_{MTOW}} = \frac{M_{Fuel \text{consomm\'e}}}{M_{MTOW}}$$
$$= \frac{F_0}{M_{MTOW}g} C_{SR} g t_p \approx 0.3 (1.11 \, 10^{-5}) 9.81 t_p$$

Le décollage jusqu'au passage de la hauteur de sécurité, prenant en général moins d'une minute $(t_p < 60 \ s)$, la perte de masse est inférieure à 0.2%. Par conséquent, l'étude du décollage sous l'hypothèse d'une masse constante est tout à fait justifiée pour une approche de type avant-projet.

3.1.4 La réaction au sol

Au contact de la piste par son train d'atterrissage, l'avion est soumis à la force de réaction au sol qui est composée d'une composante verticale à la piste $-R \overrightarrow{z}_o$ et d'une composante tangentielle $-\mu R \overrightarrow{x}_o$. La composante perpendiculaire à la piste $-R \overrightarrow{z}_o$ traduit le fait que l'avion reste au contact avec la piste, elle équilibre les autres efforts verticaux appliqués à l'avion. Bien entendu, dès que l'avion quitte la piste à V_{LOF} , la réaction au sol est nulle R=0. Selon les lois du frottement, la composante tangentielle est égale au produit de la composante perpendiculaire à la piste et du coefficient de frottement pneu/piste μ . Ce coefficient (Table A.2, p. 273) est noté μ_r lorsque l'avion roule librement, et μ_f lorsque l'avion freine.

Remarque 3.2 Moment de tangage créé par le train d'atterrissage :

Au cours de la rotation entre V_R et V_{LOF} , le train principal qui est encore en contact avec la piste, crée un moment de tangage au centre de gravité de l'avion. Ce moment de tangage est le produit de la force résultante de contact avec le sol, et du bras de levier d_{train} (Figure 3.2, p. 71).

L'équation de moment (en tangage) de l'avion s'écrit :

$$B\dot{q} = \frac{1}{2}\rho SV^2 \ell \, Cm + M_{G,train}^t$$

Pour nos simulations numériques, cette équation nous sert seulement à déduire quelle est la position de la gouverne de profondeur δ_m (à travers le coefficient aérodynamique de moment $Cm = Cm_o + Cm_\alpha(\alpha - \alpha_0) + Cm_\delta m\delta_m$) correspondante à la loi de pilotage en assiette qui est imposée (Table 3.1, p. 74). Donc négliger ce moment dû au train, n'a pas d'influence sur le calcul des autres paramètres avion.

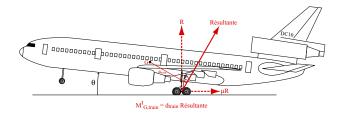


Fig. 3.2 – Moment de tangage provoqué par le train lors de la rotation (La distance d_{train} se déduit de la géométrie de l'avion et de son assiette θ).

3.2 Loi d'assiette, ou comment piloter la rotation et l'arrondi?

Le décollage d'un avion est influencé par la manière de piloter la rotation et l'arrondi. Pour simuler le décollage, il est nécessaire de choisir une loi de pilotage. Ce paragraphe a pour but d'exposer la loi de commande que nous avons choisie, et qui consiste à imposer une assiette θ à l'avion.

À partir de la vitesse de rotation V_R , le pilote tire sur le manche avec pour objectif d'atteindre l'assiette d'équilibre θ_2 qui lui permettra de monter. L'avion passe donc de l'assiette de roulage θ_r à l'assiette de montée θ_2 . En pratique, cette variation est quasilinéaire (Figure 2.15, p. 55), à peu près à vitesse de tangage q constante (Section 2.2.8, p. 52). La loi en assiette que nous définissons, respecte ces critères.

L'assiette de l'avion est égale à l'assiette de roulage θ_r (fixée par la géométrie de l'avion) jusqu'à la vitesse de rotation V_R . Afin de ne pas solliciter excessivement les modes dynamiques longitudinaux de l'avion, la loi d'assiette prévoit une phase transitoire¹ à accélération angulaire constante

$$\frac{dq}{dt} = cte = \dot{q}_{moy} = \frac{1}{B} \frac{1}{2} \rho S V_R^2 \ell \left(C m_o + C m_\alpha (\alpha - \alpha_0) + C m_\delta m \delta_m \right)$$

correspondant à un angle de gouverne de profondeur δ_m raisonnable au cours du décollage pour amorcer la rotation (-20° a été choisi pour nos simulations sachant que pour l'A300 $-30^{\circ} \leq \delta_m \leq 15^{\circ}$). La loi d'assiette respecte ensuite une vitesse de tangage constante $q=q_{AF}$ considérée égale à $3.6^{\circ}/s$ (ordre de grandeur moyen qui nous a paru cohérent vis-à-vis de ce que nous avions observé en pratique (Appendix 2.2.8, p. 52)). Après une autre phase transitoire $\frac{dq}{dt}=cte=-\dot{q}_{moy}$, l'assiette reste constante et égale à l'objectif θ_2 . L'assiette θ_2 est l'assiette qui correspond à la vitesse V_2 , à l'équilibre.

En cas de panne moteur, cette assiette θ_2 permet à l'équilibre à la vitesse de sécurité au décollage V_2 , train rentré, de respecter la pente minimale exigée par la norme FAR 25.121(b). Cette assiette se calcule analytiquement à l'aide de (Table 2.7, p. 62).

¹cette phase transitoire est également observée opérationnellement (Figure 2.15, p. 55).

Durant la phase ① (Figure 3.3, p. 73) :
$$q = 0$$

$$\theta = \theta_r$$
Durant la phase ② :
$$\frac{dq}{dt} = constante = \dot{q}_{moy}$$

$$q = \dot{q}_{moy} (t - t_R)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \dot{q}_{moy} (t - t_R)^2 + \theta_r$$

$$\theta_{\bigcirc / \bigcirc / \bigcirc } = \frac{1}{2} \dot{q}_{moy} \Delta t_r^2 + \theta_r$$
Durant la phase ③ :
$$q = constante = q_{AF}$$

$$\theta = q_{AF} (t - t_R - \Delta t_r) + \theta_{\bigcirc / \bigcirc / \bigcirc }$$

$$\theta_{\bigcirc / \bigcirc / \bigcirc } = q_{AF} \Delta t_d + \theta_{\bigcirc / \bigcirc / \bigcirc }$$
Durant la phase ④ :
$$\frac{dq}{dt} = constante = -\dot{q}_{moy}$$

$$q = -\dot{q}_{moy} (t - t_R - 2\Delta t_r - \Delta t_d)$$

$$\theta = -\frac{1}{2} \dot{q}_{moy} \Delta t_r^2 + \theta_2$$
Durant la phase ⑤ :
$$q = 0$$

$$\theta = \theta_2$$

L'expression de la vitesse de tangage q de la phase 2 pour un temps $t=t_R+\Delta t_r$ permet de déduire la durée Δt_r :

$$\Delta t_r = \frac{q_{AF}}{\dot{q}_{moy}}$$

Les expressions de l'assiette $\theta_{3/4}$ entre la phase 3 et la phase 4, permettent de déduire celle de la durée Δt_d :

$$\Delta t_d = \frac{\theta_2 - \theta_r}{q_{AE}} - \Delta t_r$$

La loi d'assiette est finalement entièrement déterminée (Table 3.1, p. 74).

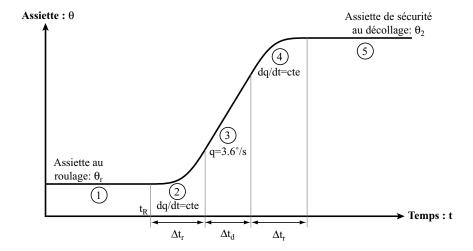
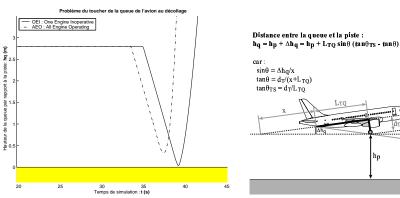


Fig. 3.3 - Loi d'assiette.

Remarque 3.3 Limitation de l'assiette au décollage

Nos simulations numériques (Section 4, p. 83) ne tiennent pas compte de la limitation géométrique de l'assiette au décollage θ_{TS} (Figure 2.5, p. 38). Cette limitation dépend de la conception du train d'atterrissage et du fuselage. Il est donc difficile de tenir compte d'une telle contrainte dans des simulations représentant toute sorte d'avions. Cela dit, sur l'ensemble de nos simulations (où $q=3.6^{\circ}/s$), si on considère une assiette maximale admissible au sol (tail strike) $\theta_{TS}=15^{\circ}$, et un train de 2.80 m de hauteur, seuls quelques rares avions simulés ont la queue qui racle la piste en cas de panne moteur; il manque seulement moins de 2 millimètres pour que la queue ne touche pas la piste!

Cette limitation en assiette, dont nous n'avons pas tenu compte dans nos simulations, ne paraîtrait donc pas primordiale pour nos calculs numériques. Il faut cependant faire attention au fait que ces résultats dépendent beaucoup de la valeur de l'assiette maximale θ_{TS} considérée. Un avion plus bas sur train ou ayant un fuselage plus long rencontrerait certainement ce problème.



(a) Cas limite d'une de nos simulations où la queue d'un avion frôle la piste. ($\theta_{TS}=15^\circ$ et distance pneu-fuselage de 2.80 m)

(b) Modèle simple de la distance entre la queue de l'avion et le sol

Loi d'assiette:

$$\theta = \begin{cases} \theta_r & \text{si} & t \leq t_R \\ \dot{q}_{moy} \frac{(t - t_R)^2}{2} + \theta_r & \text{si} & t_R \leq t \leq t_R + \Delta t_r \\ q_{AF} \left(t - t_R - \frac{1}{2} \Delta t_r \right) + \theta_r & \text{si} & t_R + \Delta t_r \leq t \leq t_R + \Delta t_r + \Delta t_d \\ -\dot{q}_{moy} \frac{(t - t_R - 2\Delta t_r - \Delta t_d)^2}{2} + \theta_2 & \text{si} & t_R + \Delta t_r + \Delta t_d \leq t \leq t_R + 2\Delta t_r + \Delta t_d \\ \theta_2 & \text{si} & t_R + 2\Delta t_r + \Delta t_d \leq t \end{cases}$$

$$\Delta t_r = \frac{q_{AF}}{\dot{q}_{moy}}$$
 et $\Delta t_d = \frac{\theta_2 - \theta_r}{q_{AF}} - \Delta t_r$.

Variables:

 q_{AF} : Vitesse de tangage durant la rotation et la phase aérienne jusqu'à rad/sce que l'assiette de montée soit atteinte. $q_{AF} \approx 3.6^{\circ}/s$

 \dot{q}_{moy} : accélération en tangage moyenne correspondant à un angle rad/s^2 de gouverne de profondeur δm raisonnable au cours du décollage pour amorcer la rotation (-20° a été choisi pour nos simulations sachant que pour l'A300 $-30^{\circ} \le \delta m \le 15^{\circ}$). $\dot{q}_{moy} = \frac{1}{B} \frac{1}{2} \rho S V_R^2 \ell \ (C m_o + C m \alpha (\alpha - \alpha_0) + C m \delta m \delta m)$ t_R : Temps auquel le pilote tire sur le manche pour amorcer la rotation

dès que V_R est atteinte.

 θ_2 : Assiette de montée (Table 2.7, p. 62) que le pilote cherche à atradteindre et maintiendra jusqu'à 400ft. C'est l'assiette qui permettra, à l'équilibre, lorsque le train sera rentré, de maintenir la vitesse de sécurité au décollage V_2 durant la montée. En cas de panne moteur, cette assiette permet également d'assurer la pente de montée minimale γ_{mini} imposée par la norme FAR 25.121(b)

 θ_r : Assiette de roulage, lorsque toutes les roues de l'avion sont en contact avec le sol.

Mode d'obtention: Le choix de l'évolution de l'assiette a été faite dans le but de respecter les critères de pilotage appliquées à AirFrance (Remarque 2.7, p. 54) (vitesse de tangage constante q_{AF} jusqu'à l'obtention de la consigne en assiette θ_2), en "arrondissant" l'évolution de l'assiette (en considérant $\dot{q} = cte$) les changements entre q = cte et $\theta = cte$ afin d'éviter de trop solliciter les modes dynamiques longitudinaux.

Domaine de définition : Lors du décollage d'avions de transport civil, avec t_R choisi au moment où le pilote tire sur le manche quand il a atteint la vitesse de rotation V_R .

Tab. 3.1 – Loi d'assiette.

18 décembre 2006 74

3.3 Équations du décollage issues du Principe Fondamental de la Dynamique

Après avoir préciser les modèles des efforts appliqués à l'avion et la loi de pilotage choisie, il est maintenant possible de déterminer les équations qui régissent le décollage en appliquant le PFD (Principe Fondamental de la Dynamique) au système avion, dans le référentiel terrestre (la piste) supposé Galiléen.

$$\begin{array}{cccc} \sum \overrightarrow{Forces} & = & m \overrightarrow{\Gamma} \\ \sum \overrightarrow{Moments} & = & \overrightarrow{\delta_{G(avion/piste)}} & \text{moment dynamique} \end{array}$$

Appliquons le principe fondamental de la Dynamique : la somme des forces selon les axes aérodynamiques \overrightarrow{x}_a et \overrightarrow{z}_a permettent d'obtenir respectivement les équations de propulsion (Equation 3.2, p. 76) et de sustentation (Equation 3.3, p. 76), et la somme des moments selon \overrightarrow{y}_b aboutit à l'équation de moment de tangage (Equation 3.4, p. 76). Les équations cinématiques de vitesses de tangage selon \overrightarrow{y}_b (Equation 3.5, p. 76) et d'altitude selon \overrightarrow{z}_o (Equation 3.6, p. 76) sont également utilisées.

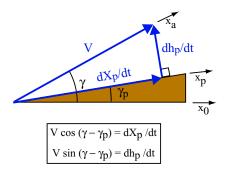


FIG. 3.4 – Déduction géométrique de la distance parcourue sur la piste X_p et de la hauteur entre la piste et l'avion h_p , en fonction de la pente de la piste γ_p .

Au roulage, c'est-à-dire tant que l'avion est en contact avec la piste (Equation 6.1, p. 118), les équations du décollage sont :

$$m\dot{V} = -\sin\gamma_p mg - \frac{1}{2}\rho V_a^2 SCx + F_{max}\cos\alpha - \mu R$$

$$0 = \cos\gamma_p mg - \frac{1}{2}\rho V_a^2 SCz - F_{max}\sin\alpha - R$$

$$Cz = Cz\alpha (\alpha - \alpha_0)$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_o + k_i Cz^2$$

$$\theta = \text{Imposée par la loi d'assiette (Table 3.1, p. 74)}.$$

$$\alpha = \theta - \gamma_p$$

$$\frac{dX_p}{dt} = V$$

$$h_p = 0$$

Dès que l'avion a quitté la piste, les équations du décollage deviennent :

$$m\dot{V} = -\sin\gamma mg - \frac{1}{2}\rho V_a^2 SCx + F_{max}\cos\alpha \tag{3.2}$$

$$-mV\dot{\gamma} = \cos\gamma mg - \frac{1}{2}\rho V_a^2 SCz - F_{max}\sin\alpha$$
 (3.3)

$$B\dot{q} = \frac{1}{2}\rho SV^2 \ell \, Cm \tag{3.4}$$

$$Cz = Cz_{\alpha} (\alpha - \alpha_0)$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_o + k_i Cz^2$$

$$Cm = Cm_o + Cm_\alpha(\alpha - \alpha_0) + Cm_\delta m \delta_m + Cm_q \frac{q\ell}{V}$$

$$\theta$$
 = Imposée par la loi d'assiette (Table 3.1, p. 74).

$$q = \dot{\theta} \tag{3.5}$$

$$\alpha = \theta - \gamma$$

$$\frac{dX_p}{dt} = V\cos\left(\gamma - \gamma_p\right)$$

$$\dot{h_p} = V\sin\left(\gamma - \gamma_p\right) \tag{3.6}$$

Les équations du décollage représentent donc un système d'équations différentielles couplées et non linéaires, qu'il est difficile d'appréhender analytiquement. Nous parviendrons tout de même à résoudre analytiquement ce système pour le roulage à incidence constante : c'est-à-dire déterminer un décollage interrompu (RTO : Rejected Take-Off), un freinage à l'atterrissage ou encore un roulage au décollage jusqu'à la vitesse de rotation V_R . Mais ce ne sera pas possible de résoudre analytiquement la phase de rotation et de phase aérienne, sans hypothèses simplificatrices.

Par contre, ce système d'équations se résout numériquement comme nous le montrerons ultérieurement (Section 4, p. 83). Cette résolution numérique servira de référence pour valider les modèles analytiques de décollage que nous mettrons au point.

	Désignation Inertie de l'avion en tangage. Coefficient $(\overrightarrow{x}_b, \overrightarrow{x}_b)$ de la matrice d'inertie	$\begin{array}{c} \textbf{Unit\'es} \\ kg.m^2 \end{array}$
	de l'avion par rapport au centre de gravité et exprimé dans le repère avion Coefficient aérodynamique de moment de tangage	
	Coefficient de moment pur de tangage	7-1
	Gradient de coefficient de moment de tangage avec l'incidence α	rad^{-1} rad^{-1}
Cmq:	Gradient de coefficient de moment de tangage avec la vitesse de tangage	raa
$Cm\delta m$:	Gradient de coefficient de moment de tangage avec le braquage de gouverne de profondeur δm	rad^{-1}
Cx:	Coefficient aérodynamique de traînée avion	
	Coefficient aérodynamique de traînée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.	
Cz:	Coefficient aérodynamique de portance avion	
	Coefficient aérodynamique de portance maximale, au delà il y a	
	décrochage. Attention sa valeur dépend de la configuration des becs/volets	
$Cz\alpha$:	Gradient de coefficient de portance avec l'incidence	rad^{-1}
F_{max} :	Poussée moteur maximale (Equation 3.1, p. 68). Il faut multiplier par	N
	$\frac{N_m-1}{N_m}$ si un des N_m moteurs est en panne.	
g:	Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 m/s^2$	m/s^2
h_p :	Hauteur entre la piste et l'avion	m
k_i :	Coefficient de traînée induite $k_i \approx \frac{1}{\pi \lambda}$	
ℓ :	Corde de référence	m
	Masse de l'avion	kg
q:	Vitesse de tangage, c'est-à-dire vitesse angulaire de l'avion par rapport à la terre selon l'axe \overrightarrow{y}_b . En vol longitudinal (Figure 2.13, p. 52), $q = \overrightarrow{\theta}$	rad/s
R:	Composante perpendiculaire à la piste de la force de réaction au sol que le contact de la piste crée sur l'avion.	N
S:	Surface voilure	m^2
	Vitesse de l'avion par rapport à la piste	m/s
1	Distance parcourue par l'avion selon la piste	m
α_0 :	Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la confi-	rad
	guration Bec/Volet adoptée.	1
	Incidence de l'avion	rad
$\Delta Cxomoulinet$.	Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au moteur en panne qui tourne en "moulinet"	
ΔCx_{oSP} :	Augmentation du coefficient de traînée de frottement due à la sortie des spoilers	
ΔCx_{oTrain} :	Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train sorti.	
0174611	Le train est considéré comme sorti durant tout le décollage (Appendix B.2, p. 302).	
ΔCz_{oSP} :	Augmentation du coefficient de portance due à la sortie des spoilers.	
	Angle de braquage de la gouverne de profondeur	rad
γ :	Pente de l'avion. Angle entre la vitesse air et l'avion en vol longitudinal.	rad
γ_p :	Pente de la piste, supposée constante	rad
λ :	Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$	
μ :	Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues libres,	
	$\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273).	_
	Masse volumique de l'air au niveau de la piste	kg/m^3
	Masse volumique au niveau de la mer : $\rho_0 = 1.225 kg/m^3$	kg/m^3
θ :	Assiette de l'avion. Angle entre la terre et l'axe de symétrie avion \overline{x}_b	rad

Deuxième partie

Élaboration d'un modèle de longueur de piste

Cette partie est destinée à l'élaboration d'un modèle de longueur de piste au décollage/atterrissage.

Un modèle numérique (Section 4, p. 83) a d'abord été mis au point par résolution itératives à partir des équations de décollages établies précédemment (Section 3, p. 67). Ce modèle numérique, validé sur des données de décollage Airbus, servira de référence pour l'élaboration de nos modèles analytiques.

L'élaboration de modèles des vitesses (Section 5, p. 93) de décision V_1 , de rotation V_R , et de décollage "lift-off" V_{LOF} , a ensuite pu être effectuée par identification sur des simulations numériques, faites à l'aide de notre modèle numérique, de divers avions fictifs, en fonction de leur charge alaire $\frac{m}{S}$, de leur taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$, et de leur finesse f. Puis, connaissant les vitesses caractéristiques au décollage, la modélisation de la lon-

Puis, connaissant les vitesses caractéristiques au décollage, la modélisation de la longueur de piste a pu être entrepris. La résolution de la phase de roulage (Section 6, p. 113) a été faite analytiquement à partir des équations du décollage (Section 3, p. 67). Par contre, la phase aérienne (Section 7, p. 193) est une phase très dynamique, ce qui rend la résolution analytique des équations au décollage impossible. La modélisation a consisté à assimiler la trajectoire de l'avion à un arrondi circulaire et une montée rectiligne, dont les paramètres ont été identifiés sur nos simulations numériques.

Au final (Section 8, p. 231), nous obtenons un modèle complet et relativement simple de la longueur de piste au décollage des avions de transport civil.

Chapitre 4

Modèle de référence numérique

Sommaire

4.1	Méthode numérique	
	4.1.1 Résolution par la méthode d'Euler 84	
	4.1.2 Recherche des décollages optimaux	
4.2	Type d'avions simulés	
	4.2.1 Simulations de bimoteurs	
	4.2.2 Simulations de quadrimoteurs	
4.3	Validation du modèle numérique de décollage sur un Air-	
	bus en tenant compte de l'effet de sol 92	

Afin de valider les modèles de décollage que nous mettrons au point, nous avons besoin d'éléments de comparaison de référence. C'est pourquoi, nous avons effectué des simulations numériques. En nous basant sur les données d'un avion de type A300, nous avons simulé 324 bimoteurs et 297 quadrimoteurs fictifs, ayant différents taux de propulsion $\frac{F_0}{rg}$, charge alaire $\frac{m}{S}$ et finesse f.

Pour chacun de ces avions, les simulations de décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative) ou sans panne moteur (All Engines Operating), et de décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off), ont été réalisées.

Les vitesses caractéristiques du décollage (Vitesse de sécurité au décollage V_2 , vitesse de rotation optimale V_R , vitesse de décision critique V_1) sont dans un premier temps déterminées par itération¹ en respectant les encadrements imposés par la norme FAR 25. Ceci permet d'obtenir les décollages, effectués avec ces vitesses, qui serviront de référence.

Ces calculs numériques ont été faits de manière itérative par la méthode d'Euler, à l'aide du logiciel MATLAB 5.3 sur un ordinateur PC^2 , avec des temps de calculs pouvant atteindre les 2 jours pour l'ensemble des avions!

 $^{^{1}}$ La détermination de la vitesse de sécurité au décollage V_{2} se fait facilement analytiquement (Section 2.2.9, p. 56). Par contre, pour déterminer la vitesse de décision V_{1} , cela se fait par itérations numériques successives (Section 2.2.5, p. 48). Or les vitesses de décision V_{1} et de rotation V_{R} sont liées, car changer de V_{R} affecte les phases de roulage et aérienne ce qui modifie la vitesse de panne critique pour laquelle le décollage avec panne prend la même longueur de piste que le décollage interrompu. Pour chaque vitesse de rotation V_{R} testée dans le but de déterminer la vitesse de rotation optimale qui minimise la longueur de piste, il faut donc déterminer la vitesse de décision V_{1} , ce qui accroît considérablement les temps de calculs.

²Windows XP SP2, Pentium III à 933 MHz, 376Mo de RAM

À partir de ces équations du décollage établies dans la partie précédente (Section 3, p. 67), nous expliciterons dans ce chapitre la méthode numérique adoptée pour mettre au point un modèle numérique de simulation de décollage.

Puis, nous exposerons quels sont les types d'avions civils que nous avons simulés, en vue de l'élaboration de nos modèles de longueur de piste aérienne (Section 7, p. 193) et de vitesses au décollage (V_1 (Table 5.1, p. 95), V_R (Table 5.3, p. 102), V_{LOF} (Table 5.6, p. 106)), grâce à l'exploitation de ce modèle numérique de décollage.

Enfin, nous montrerons la validation de ce modèle numérique de décollage sur les données précises d'un avion Airbus, en tenant compte de l'effet de sol.

4.1 Méthode numérique

Les équations du décollage établies précédemment (Section 3, p. 67), constituent un système d'équations différentielles couplées et non linéaires. La résolution analytique de ce système n'est pas envisageable. Nous allons par contre, résoudre numériquement ce système afin de déterminer l'évolution de tous les paramètres avion au cours du décollage. Ce modèle numérique servira de référence pour qualifier les modèles analytiques que nous mettons au point. La méthode d'Euler sera utilisée pour traduire les équations de la mécanique du décollage en un code numérique de simulation de décollage. Nous expliquerons la démarche adoptée pour déterminer les décollages optimaux, c'est-à-dire la manière de déterminer les vitesses adéquates de décision V_1 , de rotation V_R , ...

4.1.1 Résolution par la méthode d'Euler

Pour traduire les équations du décollage en code numérique, la simple méthode d'Euler a été utilisée. Il faut déterminer la valeur numérique de tous les paramètres avion au temps $t+\Delta t$ à partir de leur valeur au temps t. Les conditions initiales de chacun des paramètres doivent évidemment être connus pour initialiser les itérations numériques. Plus le pas de temps Δt est choisi faible, meilleure sera la précision, mais au dépend du temps de calcul. Le pas de temps Δt a été choisi égal à 0.01 seconde, ce qui est largement suffisant pour simuler des décollages d'avions.

La méthode d'Euler consiste à exprimer les dérivées temporelles comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \frac{df(t)}{dt} & \rightarrow & \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \\ \frac{d^2f(t)}{dt^2} & \rightarrow & \frac{f(t+\Delta t)-2f(t)+f(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \end{array}$$

En appliquant cette méthode aux équations du décollage, on peut déduire les valeurs au temps $t+\Delta t$, de la vitesse V par l'équation de propulsion (Equation 3.2, p. 76), la pente γ par l'équation de sustentation (Equation 3.3, p. 76), l'assiette θ par notre loi de pilotage en assiette (Table 3.1, p. 74), la vitesse de tangage q par l'équation cinématique de tangage (Equation 3.5, p. 76), ce qui permet de déduire l'incidence α par la relation des angles en longitudinal (Equation 3.6, p. 76) et les coefficients de portance Cz et de traînée Cx par la polaire, la distance piste parcourue X_p par (Equation 3.6, p. 76), et la hauteur entre l'avion et la piste h_p par l'équation cinématique d'altitude (Equation 3.6, p. 76).

La méthode numérique d'Euler appliquée aux équations du décollage permet par

exemple d'écrire pour un décollage sans panne moteur :

```
\mathtt{while}(h_p < h_s)
     \% Loi de pilotage en d'assiette :
     \mathtt{if}(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t} < \mathtt{t}_R)
           \theta(t + \Delta t) = \theta_r;
     else
           if(t + \Delta t < t_R + \Delta t_r)
                \theta(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}) = 1/2\,q_{\mathrm{moy}}\left(\mathrm{t_p}(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t})-\mathrm{t_R}\right)^2 + \theta_{\mathrm{r}};
           else
                \mathtt{if}(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t} < \mathtt{t}_R + \Delta\mathtt{t}_\mathtt{r} + \Delta\mathtt{t}_\mathtt{d})
                     \theta(t + \Delta t) = q_{AF} (t_p(t + \Delta t) - t_R - \Delta t_r) + 1/2 q_{moy} \Delta t_r^2 + \theta_r;
                else
                      \mathtt{if}(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t} < \mathtt{t}_{\mathtt{R}} + 2\,\Delta\mathtt{t}_{\mathtt{r}} + \Delta\mathtt{t}_{\mathtt{d}})
                            \theta(t + \Delta t) = -1/2 q_{moy} (t_p(t + \Delta t) - t_R - 2 \Delta t_r - \Delta t_d)^2 + \theta_2;
                           \theta(t + \Delta t) = \theta_2;
                      end
                end
           \quad \text{end} \quad
     \quad \text{end} \quad
     \gamma(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t}) = \gamma(\mathtt{t}) + \Delta\mathtt{t} \left( -1/(\mathtt{m}\,\mathtt{V}(\mathtt{t})) \right) \left( \cos\gamma(\mathtt{t})\,\mathtt{m}\,\mathtt{g} - \mathtt{P}(\mathtt{t}) - \mathtt{F}(\mathtt{t})\,\sin\alpha(\mathtt{t}) - \mathtt{R}(\mathtt{t}) \right);
     \mathtt{V}(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t}) = \mathtt{V}(\mathtt{t}) + \Delta\mathtt{t}/\mathtt{m} \left( -\sin\gamma(\mathtt{t})\,\mathtt{m}\,\mathtt{g} - \mathtt{T}(\mathtt{t}) + \mathtt{F}(\mathtt{t})\,\cos\alpha(\mathtt{t}) - \mu_\mathtt{r}\,\mathtt{R}(\mathtt{t}) \right);
     h_p(\mathtt{t} + \Delta \mathtt{t}) = h_p(\mathtt{t}) + \Delta \mathtt{t} \, \mathtt{V}(\mathtt{t}) \, (\sin \gamma(\mathtt{t}) - \cos \gamma(\mathtt{t}) \, \mathtt{tan}(\gamma_p));
     F(t + \Delta t) = F_0 \rho/\rho_0 \left(1 + q_1 V(t + \Delta t) + q_2 V^2(t + \Delta t)\right);
     if(h_p(t+\Delta t)>0) \qquad \% \ L\text{`avion ne touche plus la piste}
           \alpha(t + \Delta t) = \theta(t + \Delta t) - \gamma(t + \Delta t);
          Cz(t + \Delta t) = Cz_{\alpha} (\alpha(t + \Delta t) - \alpha_0);
          Cx(t + \Delta t) = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + k_i Cz(t + \Delta t)^2;
          \label{eq:pt} P(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t}) = 1/2 \, \rho \; \mathtt{S} \; \mathtt{V}^2(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t}) \; \mathtt{Cz}(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t});
          T(t + \Delta t) = 1/2 \rho S V^2(t + \Delta t) Cx(t + \Delta t);
           R(t + \Delta t) = 0;
     else \% L'avion est en contact avec la piste
          h_p(t + \Delta t) = 0;
           \alpha(t + \Delta t) = \theta(t + \Delta t) - \gamma(t + \Delta t);
           Cz(t + \Delta t) = Cz_{\alpha} (\alpha(t + \Delta t) - \alpha_0);
           \mathtt{Cx}(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t}) = \mathtt{Cx}_{\mathtt{o}} + \Delta\mathtt{Cx}_{\mathtt{oTrain}} + \mathtt{k_i} \; \mathtt{Cz}(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t})^2;
          P(t + \Delta t) = 1/2 \rho S V^2(t + \Delta t) Cz(t + \Delta t);
          T(t + \Delta t) = 1/2 \rho S V^2(t + \Delta t) Cx(t + \Delta t);
           \mathtt{R}(\mathtt{t} + \Delta \mathtt{t}) = \mathtt{m} \, \mathtt{g} \, \cos(\gamma_\mathtt{P}) - \mathtt{P}(\mathtt{t} + \Delta \mathtt{t}) - \mathtt{F}(\mathtt{t} + \Delta \mathtt{t}) \, \sin(\alpha(\mathtt{t} + \Delta \mathtt{t}));
           if(R(t + \Delta t) < 0)
               R(t + \Delta t) = 0;
           end
     if(Cz(t + \Delta t) > Cz_{max}) % décrochage!
          h_p(end) = -Inf; \quad X_p(end) = NaN; \quad break
     end
     n_{z}(t+\Delta t) = 1 + V(t+\Delta t) \left( \gamma(t+\Delta t) - \gamma(t) \right) / (g \, \Delta t);
     q(t + \Delta t) = (\theta(t + \Delta t) - \theta(t))/\Delta t;
     \mathtt{X}_{\mathtt{p}}(\mathtt{t} + \Delta\mathtt{t}) = \mathtt{X}_{\mathtt{p}}(\mathtt{t}) + \Delta\mathtt{t} \; (\mathtt{V}(\mathtt{t}) \; \cos(\gamma(\mathtt{t}) - \gamma_{\mathtt{p}}));
     \delta_{\text{m}}(\text{t} + \Delta \text{t}) = 1/\text{Cm} \\ \delta_{\text{m}}\left(\text{B}\left(q(\text{t} + \Delta \text{t}) - q(\text{t})\right)/(\Delta \text{t} \ 1/2 \ \rho \ \text{SV(t)}^2 \ \ell \ ) - \text{Cm}_{\text{o}} - \text{Cm}_{\alpha} \ (\alpha(\text{t}) - \alpha_0)); \right.
     \mathtt{t}=\mathtt{t}+\Delta\mathtt{t};
end
```

4.1.2 Recherche des décollages optimaux

La résolution numérique des équations du décollage exposées ci-dessus, sous-entend que les vitesses au décollage $(V_1, V_R, V_2...)$ sont connues. En fait, il nous faut les déterminer.

La vitesse de sécurité au décollage V_2 ne pose pas de problème car elle se calcule analytiquement (Table 2.6, p. 59), donc sans itération. Les vitesses de décision V_1 et de rotation V_R sont par contre à déterminer par un processus itératif. Selon la vitesse de rotation choisie, le décollage prendra plus ou moins de longueur de piste, il faut donc la choisir judicieusement. Comme nous l'avons montré (Figure 5.3, p. 99), le décollage optimal correspond à la vitesse de rotation V_R (Section 2.2.6, p. 50) permettant d'obtenir l'objectif en assiette de montée θ_2 en même temps que la vitesse de sécurité au décollage $V_2: V(\theta_2) = V_2$.

Pour un même avion, on va donc simuler numériquement plusieurs décollages, avec des vitesses V_R différentes afin de déterminer celle qui permettrait d'obtenir θ_2 et V_2 en même temps, avec panne moteur : c'est un processus itératif. Pour chaque vitesse de rotation V_R testée, si la vitesse correspondant à l'obtention de l'objectif en assiette $V(\theta_2)$ est supérieure à la vitesse de sécurité au décollage V_2 , alors il faut tester une V_R plus faible (et inversement si $V(\theta_2) < V_2$). Pour chaque vitesse de rotation V_R testée, il faut déterminer la vitesse de décision V_1 correspondante, car la V_R doit être choisie pour le cas de panne moteur critique au décollage. Le couplage de la recherche de ces deux vitesses V_R et V_1 , peut vite augmenter de façon significative les temps de calculs. Pour gagner à la fois en temps de calcul et en précision pour la recherche de ces vitesses, nous effectuons une interpolation. Pour une vitesse de panne inférieure à la vitesse de panne critique, la longueur de piste d'un décollage interrompu $L_{p_{RTO}}(V_{1inf})$ est inférieure à la longueur de piste d'un décollage avec panne moteur $L_{pOEI}(V_{1inf})$. Inversement une vitesse de panne supérieure à la vitesse de panne critique la longueur de piste d'un décollage interrompu $L_{PRTO}(V_{1sup})$ est supérieure à la longueur de piste d'un décollage avec panne moteur $L_{POEI}(V_{1sup})$. Une recherche de V_1 par dichotomie classique consisterait à tester la vitesse moyenne $\frac{V_{1sup}+V_{1inf}}{2}$. L'idée est de tester à chaque itération une vitesse bien plus proche de la V_1 recherchée que la simple moyenne $\frac{V_{1sup}+V_{1inf}}{2}$. C'est le cas de la vitesse V_{1test} correspondant à l'intersection des longueurs de pistes (RTO et OEI) en fonction de la vitesse de panne, si ces longueurs de pistes étaient linéaires entre V_{1inf} et V_{1sup} .

$$\begin{array}{lcl} L_{PRTO}(V_{1sup}) & = & aV_{1sup} + b, & L_{POEI}(V_{1sup}) = cV_{1sup} + d \\ L_{PRTO}(V_{1inf}) & = & aV_{1inf} + b, & L_{POEI}(V_{1inf}) = cV_{1inf} + d \end{array}$$

On testera lors de la prochaine itération la vitesse V_{1test} telle que $L_{POEI}(V_{1test}) = L_{PRTO}(V_{1test}) = aV_{1test} + b = cV_{1test} + d$:

$$\begin{split} V_{1test} &= \frac{d-b}{a-c} \\ &= \frac{(L_{pOEI}(V_{1inf}) - L_{pRTO}(V_{1inf})) \, V_{1sup} + (L_{pRTO}(V_{1sup}) - L_{pOEI}(V_{1sup})) \, V_{1inf}}{L_{pOEI}(V_{1inf}) - L_{pRTO}(V_{1inf}) + L_{pRTO}(V_{1sup}) - L_{pOEI}(V_{1sup})} \end{split}$$

Cette méthode de pseudo-dichotomie permet de converger beaucoup plus vite vers la vraie V_1 . En deux à trois itérations, on détermine ainsi la V_1 à $\pm 0.01\%$ près. La même précision a été choisie pour la détermination de V_R .

REMARQUE 4.1 La vitesse de décollage "lift-off" V_{LOF} n'est qu'une conséquence numérique : nous n'avons pas besoin de sa valeur pour mettre en œuvre nos simulations, mais par contre les simulations permettent de déduire sa valeur. À partir des simulations des décollages effectués avec les vitesses V_1 et V_R déterminées précédemment, on connaît l'évolution de la vitesse et de l'altitude au cours du décollage. La vitesse V_{LOF} est la vitesse correspondant à la première altitude piste supérieure à zéro (où l'avion quitte la piste). La vitesse de rotation V_R étant imposée identique avec ou sans panne moteur, la vitesse V_{LOF} obtenue est différente selon les cas de décollage avec ou sans panne moteur, puisque la différence de poussée implique une capacité d'accélération différente durant la rotation.

Remarque 4.2 Nos simulations de décollage tiennent compte des limitations imposées par la norme sur les vitesses au décollage (Table 2.1, p. 32), excepté pour les contraintes liées à la V_{MC} de la FAR 25.107, qui impliquerait de mettre en œuvre des modèles en latéral, ce que nous n'avons pas fait.

C'est ainsi que sont obtenues les simulations de décollage avec (OEI) et sans (AEO) panne moteur, et de décollage interrompu (RTO), pour les vitesses au décollage ainsi déterminées. Ces simulations nous servirons de référence pour l'élaboration et la validation de nos modèles analytiques de performances au décollage.

4.2 Type d'avions simulés

Les paragraphes précédents, ont montré comment a été élaboré notre modèle numérique permettant de simuler les décollages d'un avion donné.

Nous allons mettre en œuvre ce modèle numérique pour simuler les décollages d'une grande quantité d'avions ayant des caractéristiques couvrant l'ensemble des avions de transport civils. Ces simulations serviront de référence pour la mise au point de nos modèles de longueur de piste aérienne (Section 7, p. 193) et de vitesses au décollage V_1 (Table 5.1, p. 95), V_R (Table 5.3, p. 102), V_{LOF} (Table 5.6, p. 106).

4.2.1 Simulations de bimoteurs

C'est ainsi que nous avons effectué les simulations de 324 avions bimoteurs fictifs, ayant différentes valeurs de

- taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ (de 0.27 à 0.38 par pas de 0.01),
- charge alaire $\frac{m}{5}$ (de 500 à 700 kg/m^2 par pas de 100), et
- finesse (à travers le coefficient de traînée Cx_o , ce qui correspond à des finesses équivalente en croisière comprises entre 12 et 20 par pas de 1).

Les caractéristiques avion communes à toutes les simulations sont :

- Masse de l'avion au décollage $M_{MTOW} = 160000 \, kg$ (c'est la masse de l'A300, mais cela a peu d'importance puisque à charge alaire et taux de propulsion donnés, les simulations ont montrées que les décollages ne dépendent pas de la masse. L'effet de taille n'a donc pas d'influence sur les performances au décollage).
- Le nombre de moteur équipant l'avion : $N_m = 2$
- Les coefficients du modèle de poussée moteur : $q_1 = -1/340$ et $q_2 = 1/2*(1/340)^2$ (Valeurs du modèle de J.Mattingly [Mat96], représentatif d'un réacteur civil au décollage [Rou02])
- Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train en position sortie : $\Delta Cx_{oTrain} = 0.0175$ (valeur de celui de l'A300)
- Augmentation du coefficient de traînée de frottement due aux spoilers : $\Delta Cx_{oSP}=0.06$ (valeur de celui de l'A300)
- Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au moteur en panne qui tourne en "moulinet" : $\Delta Cx_{omoulinet} = 0.004$ (cf.[MS00])

- Coefficient de traînée induite $k_i = 0.055$ (celui de l'A300)
- Coefficient de portance maximale (fonction becs/volets) : $Cz_{max} = 1.728$ (celui de l'A300 en configuration de décollage (Remarque 4.3, p. 89))
- Coefficient de gradient de portance $Cz_{\alpha} = 5$ (valeur de l'A300)
- Coefficient de portance due aux spoilers $\Delta C z_{oSP} = -0.15$ (valeur A300)
- Incidence de portance nulle $\alpha_0 = -2\pi/180 \, rad$ (A300 en configuration de décollage)
- Incidence de roulage $\alpha_r = 0 \ rad$.
- Vitesse de tangage durant la rotation $q = 3.6^{\circ}/s = 0.0628 \, rad/s$ (Section 2.2.8, p. 52).
- Données non essentielles servant uniquement à déduire la position de la gouverne de profondeur δ_m :
 - Inertie de l'avion en tangage $B = 9.72 \cdot 10^6 \, kgm^2$ (celle de l'A300 [Boi01a])
 - Corde de référence $\ell = 6.6 m$.
 - Coefficient de moment de tangage en configuration de décollage : $Cm_o = -0.062$ (d'après des données internes sur l'A300)
 - Coefficient de gradient de moment de tangage avec l'incidence $Cm_{\alpha} = -0.1$ (de l'A300)
 - Coefficient de gradient de moment de tangage avec la gouverne de profondeur δ_m : $Cm\delta_m = -1.46$ (de l'A300)
- Coefficient de gradient de moment de tangage avec la vitesse de tangage $q:Cm_q=-12$ Les données du terrain qui ont été considérées :
- Constante de gravité terrestre $g = 9.81 \ m/s^2$
- Pente de la piste supposée constante (> 0 si montée, < 0 si descente) : $\gamma_p = 0 \, rad$
- Masse volumique de l'air au niveau de la piste $\rho = 1.225 \ kg/m^3$
- Masse volumique de l'air au niveau de référence à altitude nulle $\rho_0 = 1.225 \, kg/m^3$
- Vitesse du son au niveau de la piste $a=340\ m/s$
- Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre $\mu_r = 0.015$ (représentatif d'une piste standard sèche)
- Coefficient de frottement pneu/piste au freinage $\mu_f = 0.4$ (représentatif d'un avion civil freinant sur une piste standard sèche)

4.2.2 Simulations de quadrimoteurs

Les décollages de 297 quadrimoteurs ont été simulés avec des caractéristiques similaires à celle des bimoteurs excepté :

- taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ (de 0.2 à 0.3 par pas de 0.01),
- le nombre de moteur équipant l'avion : $N_m = 4$
- la vitesse de tangage à l'arrondi $q=2.5^{\circ}/s=0.0436\,rad/s$ (Section 2.2.8, p. 52)

Les contraintes de la norme FAR 25 ont bien entendue considérées comme celles relatives aux quadrimoteurs : par exemple la contrainte de la vitesse minimale de sécurité au décollage de $V_{2min} = 1.08V_{S1}$ (au lieu de $1.13V_{S1}$ pour les bimoteurs) ou de la pente minimale de montée $\gamma_{mini} = 1.7^{\circ}$ (au lieu de 1.4° pour les bimoteurs).

REMARQUE 4.3 En pratique, les avions réels ont des valeurs de Cz_{max} en configuration de décollage, qui diffèrent quelque peu $(Cz_{max}=2.58\ {\rm pour\ un\ A319},\ 3.10\ {\rm pour\ un\ A321},\ 2.15\ {\rm pour\ un\ B717-200},\ 1.90\ {\rm pour\ un\ B727-200},\ \ldots)$. Nous pourrions alors penser qu'il aurait été judicieux d'effectuer également un maillage en Cz_{max} pour couvrir l'ensemble des avions possible. Changer le Cz_{max} a une influence sur le calcul de la vitesse de décrochage V_{S1} et donc sur le calcul des autres vitesses de décollage. Changer la valeur du Cz_{max} peut se traduire simplement par un changement équivalent de la valeur de la charge alaire.

$$\left(\frac{m}{S}\right)_{ref} = \frac{1}{2g}\rho V_{S1ref}^2 C z_{maxref}$$

$$\frac{m}{S} = \frac{1}{2g}\rho V_{S1}^2 C z_{max}$$

$$\frac{m}{S} = \left(\frac{m}{S}\right)_{ref} \left(\frac{V_{S1}}{V_{S1ref}^2}\right)^2 \left(\frac{C z_{max}}{C z_{maxref}}\right)$$

Si on désire la même vitesse de décrochage V_{S1} dans le but d'avoir les mêmes performances au décollage, alors la charge alaire à considérer est :

$$\frac{m}{S} = \left(\frac{m}{S}\right)_{ref} \left(\frac{Cz_{max}}{Cz_{maxref}}\right)$$

Par exemple pour une référence $\left(\frac{m}{S}\right)_{ref}=600~kg/m^2$ avec $Cz_{maxref}=1.73,$ cela correspond un décollage à $\frac{m}{S}=500~kg/m^2$ avec $Cz_{max}=1.44.$ Ainsi, il ne semble pas nécessaire de faire un maillage en Cz_{max} pour nos simulations puisque les performances au décollage de Cz_{max} différents peuvent se déduire à partir des simulations à $Cz_{max} = 1.73$ en considérant une charge alaire équivalente. En pratique, cela n'est valable que pour les cas de décollage où la vitesse de sécurité au décollage est contrainte par la valeur minimale imposée par la norme : $V_{S1} = 1.13V_{S1}$. Car dans le cas contraire $(V_2$ non contrainte), alors la valeur de la V_2 est affectée par le changement de charge alaire et donc les performances au décollage diffèrent un petit peu. Par exemple, pour un taux de propulsion de 0.31 et une finesse de 17, en prenant comme référence $\left(\frac{m}{S}\right)_{ref}=600\;kg/m^2$ avec $Cz_{maxref}=1.73,$ cette méthode appliquée à un $Cz_{max} = 2.01$ reviendrait à considérer un avion de charge alaire $\frac{m}{S} = 700 \ kg/m^2$. La longueur de piste au décollage de l'avion de référence est de 2064m en AEO et de 2353m en OEI, alors que pour l'avion qui aurait du être équivalent, la longueur de piste est de 2163m en AEO et 2478m en OEI. La différence vient du fait que l'avion dit équivalent se retrouve dans le cas d'une vitesse de sécurité au décollage V_2 non contrainte $V_2 > 1.13V_{S1}$ donc différente de celle de l'avion de référence. Cela entraîne des vitesses de rotation V_R différentes, et des lois de pilotage en assiette différentes (car différentes V_2 impliquent différentes pente de montée θ_2 (Table 2.7, p. 62)) et donc des longueurs de piste différentes. Cela dit, la plupart des avions ont leur décollage avec une V_2 contrainte. Donc cette méthode est justifiée dans la plupart des cas.

REMARQUE 4.4 En vue d'une étude de la configuration optimale des becs/volets à partir de nos modèles de décollage, il est peut-être possible d'envisager une charge alaire équivalente (pour tenir compte de l'augmentation du Cz_{max} correspondante (Remarque 4.3, p. 89)) et une finesse équivalente (pour tenir compte de l'augmentation de traînée due à la sortie d'hyper-sustentateurs). L'idée reste à creuser...

AEO: All Engine Operating

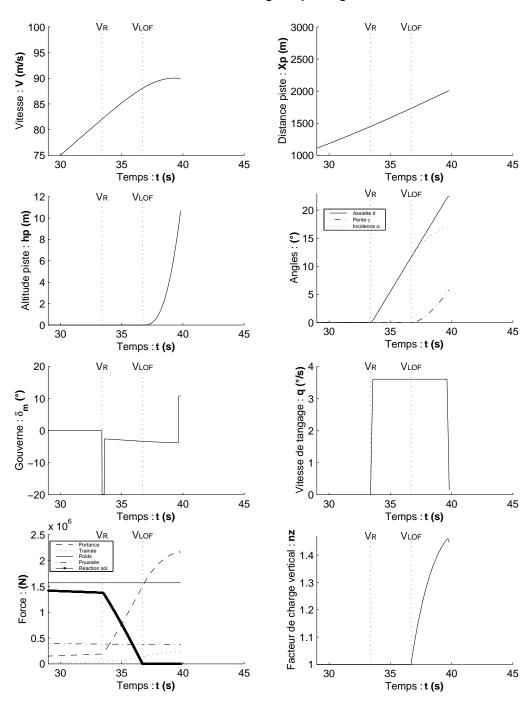


FIG. 4.1 – Exemple de simulation d'un bimoteur $(\frac{F_0}{mg}=0.31,\ f=17,\ \frac{m}{S}=600\ kg/m^2)$ d'un décollage sans panne moteur (AEO)

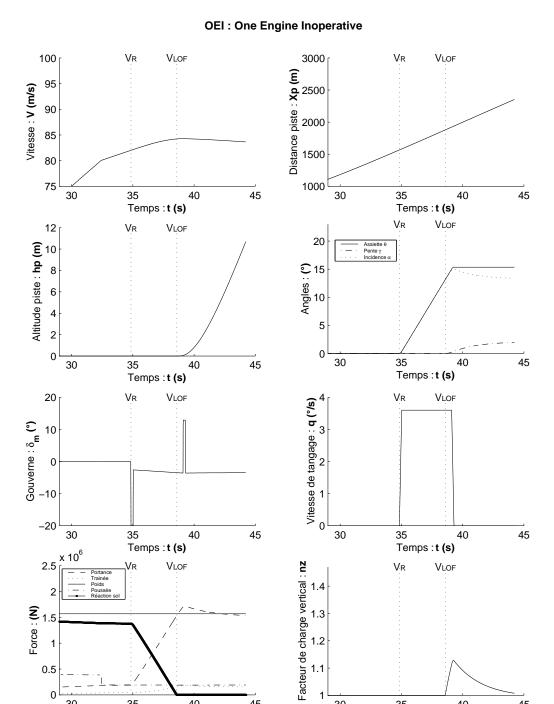


Fig. 4.2 – Exemple de simulation d'un bimoteur $(\frac{F_0}{mg}=0.31,\ f=17,\ \frac{m}{S}=600\ kg/m^2)$ d'un décollage avec panne moteur (OEI)

30

35

Temps:t(s)

40

45

40

35 Temps : **t (s)**

0.5

30

45

4.3 Validation du modèle numérique de décollage sur un Airbus en tenant compte de l'effet de sol

Airbus [Mar05] a eu la gentillesse de nous fournir des données expérimentales précises de décollage d'un de leur avion, afin que nous puissions valider notre modèle numérique de décollage. Ces données ne sont pas exposées dans ce document, mais nous indiquons tout de même la précision de notre modèle numérique par rapport à ces données. Cette précision s'est avérée satisfaisante puisque l'erreur relative moyenne d'estimation de notre modèle numérique est de 0.85% pour les vitesses de décollage, et de 8.7% et 11.3% pour les longueurs de piste au décollage sans et avec panne moteur. Les constantes q_1 et q_2 de notre modèle de poussée moteur maximale (Equation 3.1, p. 68), ont été déterminées à l'aide du modèle moteur [Rou02] que nous avons élaboré avec les données constructeur de taux de dilution, de taux de compression et de température entrée turbine du moteur équipant l'avion étudié.

Si nous mettons en œuvre un modèle sophistiqué de type ESDU [ESD72] de l'effet de sol, pour compléter notre modèle numérique, les estimations sont encore plus proches des données expérimentales d'Airbus : 0.35% pour les vitesses, et pour les longueurs de piste au décollage 5.6% en AEO (All Engines Operating) et 2.1% en OEI (One Engine Inoperative).

Chapitre 5

Modèles identifiés des vitesses de décision V_1 , de rotation V_R , et de décollage V_{LOF}

Nos simulations numériques (Section 4, p. 83) d'avions fictifs ayant différents taux de propulsion, charges alaire, et finesse, ont permis l'élaboration par identification, de modèles des vitesses de décision V_1 , de rotation V_R et de décollage ou "lift-off" V_{LOF} . Ce chapitre expose ces modèles identifiés, qui seront utilisés dans les chapitres suivants pour élaborer un modèle de longueur de piste.

5.1 Modèle du rapport des vitesses de décision et de rotation $\frac{V_1}{V_P}$

À l'aide de nos simulations numériques de bimoteurs ou de quadrimoteurs au décollage, nous avons élaboré un modèle du rapport des vitesses de décision et de rotation $\frac{V_1}{V_R}$ en fonction du taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$, de la charge alaire $\frac{m}{S}$, et de la finesse équivalente de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$. Ce modèle est identifié par rapport aux simulations numériques, par la méthode des moindres carrés (Appendix C, p. 309). Ce modèle ne tient pas compte de la limitation éventuelle de la vitesse de décision V_1 par le critère de vitesse de contrôle minimale $V_R \geq 1.05 V_{MC}$ (cf.FAR 25.107(e)), ni de la limitation éventuelle de la capacité de freinage (vitesse maximale pour laquelle les freins sont capables d'arrêter l'avion, sans excéder l'énergie de freinage maximale). Par contre, ce modèle prend bien en compte la limitation éventuelle par rapport à la vitesse de rotation : $V_1 \leq V_R$ (cf.FAR 25.107(e)).

5.1.1 Modèle adapté aux bimoteurs

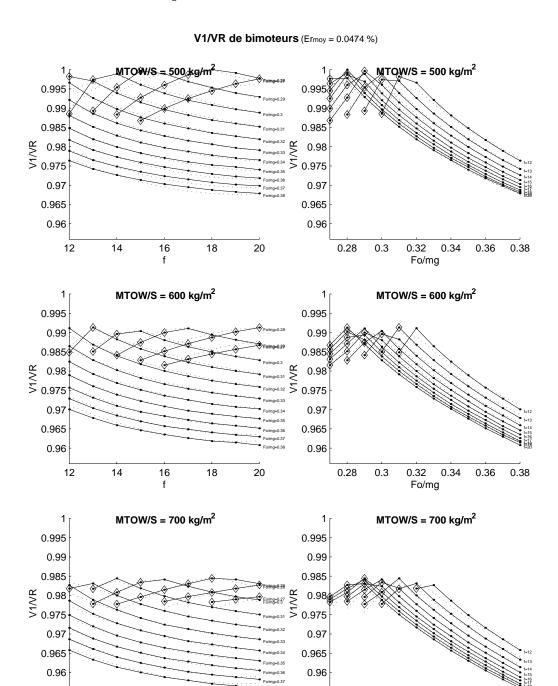


Fig. 5.1 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du rapport des vitesses de décision et de rotation $\frac{V_1}{V_R}$. Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

20

18

12

14

16

0.32 Fo/mg

0.34

0.36

0.28

0.3

Modèle du rapport des vitesses de décision et de rotation $\frac{V_1}{V_R}$ au décollage pour des bimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13 V_{S1}$

$$\frac{V_1}{V_R} = \left(K_1 f^2 + K_2 f + K_3\right) \left(\frac{F_0}{mg}\right)^2 + \left(K_4 f^2 + K_5 f + K_6\right) \left(\frac{F_0}{mg}\right)^2 + \left(K_7 f^2 + K_8 f + K_9 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_{10} \left(\frac{m}{S}\right) + K_{11}$$

$$K_1 = -7.59 \, 10^{-5}$$
 $K_2 = -0.0315$ $K_3 = 1.93$ $K_4 = 1.13 \, 10^{-3}$ $K_5 = -4.71 \, 10^{-3}$ $K_6 = -1.49$ $K_7 = -2.34 \, 10^{-4}$ $K_8 = -6.59 \, 10^{-4}$ $K_9 = 6.34 \, 10^{-8}$ $K_{10} = -1.28 \, 10^{-4}$ $K_{11} = 1.37$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$\frac{V_1}{V_R} = \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \frac{F_0}{mg} + K_3 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_4\right) f^2 + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \frac{F_0}{mg} + K_7 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_8\right) f + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

Mode d'obtention : identifié par les moindres carrés sur des simulations de décollage de bimoteurs (Section 4, p. 83). C'est la vitesse de décision correspondant à la vitesse de rotation permettant d'obtenir la vitesse de sécurité au décollage V_2 en même temps que l'assiette θ_2 (Table 3.1, p. 74), pour une vitesse de tangage durant la rotation de $q=3.6^\circ/s$. Les limitations éventuelles de V_1 par rapport à la V_{MC} (FAR 25.107.e) ou par rapport à l'énergie de freinage maximale n'ont pas été prises en compte. Par contre, le critère $V_1 \leq V_R$ a bien été respecté. (Si le calcul donne $\frac{V_1}{V_R} \geq 1$, considérez $V_1 = V_R$.)

Domaine de définition : avions de transport civil. Le rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$ est donné pour des bimoteurs de taux de propulsion $0.27 \leq \frac{F_0}{mg} \leq 0.38$, de charge alaire $500 \leq \frac{m}{S} \leq 700 \ kg/m^2$, et de finesse équivalente en croisière $12 \leq f \leq 20$.

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.038% pour les décollages contraints en V_2 , et 0.09% pour les décollages non contraints en V_2 .

Symboles : Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + k_i Cz^2$). Il dépend de la configura-	_
tion becs/volets. F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	1 V
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.27 et 0.38 pour nos simulations	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
M_{MTOW} qui a été désignée par m pour simplifier les notations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire, entre 500 et 700 kg/m^2 pour nos simulations	kg/m^2
S: Surface voilure de référence	m^2
V_{EF} : Vitesse la plus critique à laquelle une panne moteur peut survenir	m/s
V_1 : Vitesse de décision.	m/s
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Section 2.2.9, p. 56)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale (cf.FAR 25.107(b/c))	m/s
V_R : Vitesse de rotation (Section 2.2.6, p. 50).	m/s

Tab. 5.1 – Modèles du rapport $\frac{V_1}{V_R}$ de bimoteurs

5.1.2 Modèle adapté aux quadrimoteurs

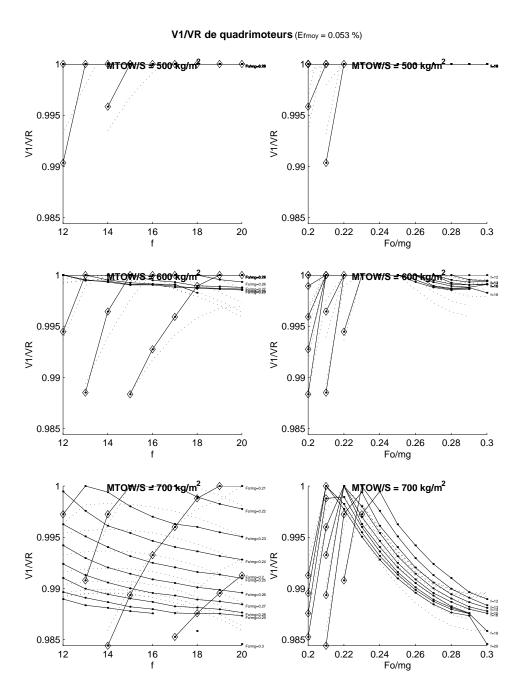


Fig. 5.2 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du rapport des vitesses de décision et de rotation $\frac{V_1}{V_R}$. Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle du rapport des vitesses de décision et de rotation $\frac{V_1}{V_R}$ au décollage pour des quadrimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.08 V_{S1}$

$$\frac{V_1}{V_R} = \left(K_1 f^2 + K_2 f + K_3\right) \left(\frac{F_0}{mg}\right)^2 + \left(K_4 f^2 + K_5 f + K_6\right) \left(\frac{F_0}{mg}\right)^2 + \left(K_7 f^2 + K_8 f + K_9 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_{10} \left(\frac{m}{S}\right) + K_{11}$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$\frac{V_1}{V_R} = \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \frac{F_0}{mg} + K_3 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_4\right) f^2 + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \frac{F_0}{mg} + K_7 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_8\right) f + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

Mode d'obtention : identifié par les moindres carrés sur des simulations de décollage de quadrimoteurs (Section 4, p. 83). C'est la vitesse de décision correspondant à la vitesse de rotation permettant d'obtenir la vitesse de sécurité au décollage V_2 en même temps que l'assiette θ_2 (Table 3.1, p. 74), pour une vitesse de tangage durant la rotation de $q=2.5^\circ/s$. Les limitations éventuelles de V_1 par rapport à la V_{MC} (FAR 25.107.e) ou par rapport à l'énergie de freinage maximale n'ont pas été prises en compte. Par contre, le critère $V_1 \leq V_R$ a bien été respecté. (Si le calcul donne $\frac{V_1}{V_R} \geq 1$, considérez $V_1 = V_R$.)

Domaine de définition : avions de transport civil. Le rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$ est donné pour des quadrimoteurs de taux de propulsion $0.2 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.3$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700 \ kg/m^2$, et de finesse équivalente en croisière $12 \le f \le 20$.

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.07% pour les décollages contraints en V_2 , et 0.17% pour les décollages non contraints en V_2 .

Symboles : Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o +$	_
$\Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + k_iCz^2$). Il dépend de la configura-	
tion becs/volets.	
F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.2 et 0.3 pour nos	_
simulations	
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g\approx 9.81\ m/s^2$	m/s^2
\boldsymbol{m} : Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
M_{MTOW} qui a été désignée par m pour simplifier les notations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire, entre 500 et 700 kg/m^2 pour nos simulations	kg/m^2
S: Surface voilure de référence	m^2
V_{EF} : Vitesse la plus critique à laquelle une panne moteur peut survenir	m/s
V_1 : Vitesse de décision.	m/s
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Section 2.2.9, p. 56)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale (cf. FAR 25.107(b/c))	m/s
V_R : Vitesse de rotation (Section 2.2.6, p. 50).	m/s

Tab. 5.2 – Modèles du rapport $\frac{V_1}{V_R}$ de quadrimoteurs

5.2 Modèle du rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$

Plus qu'un encadrement opérationnel donnée précédemment (Section 2.2.6, p. 50), nous avions besoin d'un modèle de la vitesse de rotation V_R , puisque cette vitesse est un paramètre d'entrée de notre modèle de longueur de piste.

Afin de choisir la vitesse de rotation V_R la plus adaptée au décollage, plusieurs simulations ont été effectuées pour différents rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$, et différents taux de rotation q, avec la loi de pilotage en assiette (Table 3.1, p. 74) représentative des directives de pilotage d'AirFrance (Remarque 2.7, p. 54).

Ces simulations ont montré (Figure 5.3, p. 99) que le cas de décollage avec panne moteur est plus dimensionnant qu'un décollage sans panne moteur pour le choix de la vitesse de rotation V_R . Dès lors que la vitesse V_R permet à l'avion de décoller sans panne moteur (pas de décrochage dû à une V_R trop proche de V_{S1}), le décollage avec panne moteur n'est pas forcément possible (vitesse de sécurité V_2 pas atteinte avant le passage de la hauteur de sécurité h_s), contraignant le choix de la V_R a une valeur plus élevée. C'est pourquoi, nous nous intéresserons au cas de décollage avec panne moteur pour étudier le choix de la vitesse de rotation V_R . Ce cas montre notamment qu'il existe un couple $\frac{V_R}{V_{S1}}$, q qui minimise la longueur de piste totale.

L'effet de la vitesse de rotation V_R :

Si la vitesse de rotation V_R est choisie trop faible, l'avion doit continuer à accélérer, jusqu'à atteindre la vitesse à laquelle il pourra quitter le sol V_{LOF} , en position cabrée (assiette supérieure à celle du roulage toutes roues posées $\theta > \theta_r$), ce qui n'est pas propice à l'accélération de l'avion puisque la composante de poussée des réacteurs selon l'axe de la piste est plus faible, et que la traînée de l'avion est plus importante. Par conséquent, la longueur de piste est plus importante.

Au contraire, si la V_R est trop élevée, l'avion atteint une vitesse bien supérieure à celle nécessaire au décollage. La longueur de roulage est donc inutilement élevée, et la longueur de piste aussi.

Cette explication rapide permet de concevoir l'existence d'un optimum en V_R . En pratique, les vitesses de rotation trop faibles ne permettent pas de satisfaire la contrainte de la norme FAR 25.111.c(2) assurant que la vitesse de sécurité V_2 doit être atteinte avant h_s et maintenue jusqu'à 400ft. Au total, par rapport à ces deux contraintes, l'intérêt est de choisir $\frac{V_R}{V_{S1}}$ le plus faible possible, tout en restant dans le domaine certifiable c'est-à-dire permettant d'atteindre V_2 avant h_s .

L'effet de la vitesse de tangage q:

En ce qui concerne la vitesse de tangage q de la rotation et arrondi, si elle est prise trop faible, l'avion atteint la vitesse V_{LOF} avant d'atteindre l'incidence correspondante α_{LOF} , permettant de quitter le sol. L'avion parcourra des mètres de piste avant d'atteindre l'incidence α_{LOF} nécessaire ce qui augmentera la longueur de piste au décollage. Et à l'inverse, si la vitesse de tangage q est choisie trop rapide, l'avion se cabre trop rapidement et atteint l'incidence de décollage α_{LOF} bien avant la vitesse nécessaire pour décoller V_{LOF} . En position cabré, l'avion a du mal à accélérer jusqu'à la vitesse V_{LOF} , ce qui pénalise la longueur de piste au décollage.

Ainsi, ce raisonnement rapide permet de concevoir l'existence d'un optimum théorique de la vitesse de tangage.

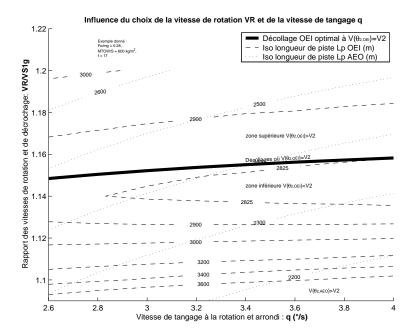


FIG. 5.3 – Simulations de décollage d'un bimoteur pour différentes vitesses de rotation V_R et taux de rotation q. Afin de visualiser l'existence d'une vitesse de rotation V_R pour laquelle la longueur de piste est minimale L_p , la contrainte de la norme FAR 25.111.c.2 imposant que la vitesse au passage de la hauteur de sécurité h_s soit d'au moins V_2 , a été ignorée pour ce tracé.

En pratique, cette optimum est absurde physiquement. Pour l'exemple donné (Figure 5.3, p. 99), cet optimum est de l'ordre de $16^{\circ}/s$ ce qui n'est pas envisageable! L'inertie de l'avion en tangage et l'efficacité de la gouverne de profondeur font que de telles vitesses de tangage ne peuvent pas être atteintes en pratique. Par ailleurs, pour des valeurs exagérément élevées de la vitesse de tangage q, alors la vitesse de décollage V_{LOF} devient plus faible que la valeur minimale par rapport à la V_{mu} imposée par la norme (cf.FAR 25.107.e).

Pour des valeurs q plausibles (Section 2.2.8, p. 52), plus la vitesse de tangage q est choisie élevée, plus la longueur de piste au décollage est faible.

CE QU'IL FAUT RETENIR 5.1 Dans le domaine certifiable, plus la vitesse de tangage à la rotation et à l'arrondi q est élevée, ou plus le rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$ est faible, plus la longueur de piste L_p nécessaire au décollage est courte.

Comment choisissons-nous la vitesse de rotation V_R ?

Sur la figure (Figure 5.3, p. 99), sont mis en évidence les décollages où $V(\theta_2) = V_2$. Ce sont des décollages où l'avion atteint l'assiette consigne θ_2 en même temps que la vitesse de sécurité au décollage V_2 . Ils ont l'avantage d'assurer à l'avion, avant le passage de la hauteur de sécurité, d'avoir au moins deux des paramètres d'équilibre (θ_2 et V_2) avec panne moteur qui assureront la pente de montée minimale γ_{mini} exigée FAR 25.121(a) quand le train sera rentré.

Par ailleurs, la vitesse de sécurité au décollage V_2 doit être atteinte FAR 25.111.c(2) avant le passage de la hauteur de sécurité h_s et maintenue jusqu'à 400ft. Le critère de

choix du rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$ tel que $V(\theta_2) = V_2$, permet d'obtenir la V_2 avant h_s et d'assurer une vitesse au passage de la hauteur de sécurité en général supérieure ou égale à V_2 . Certaines simulations montrent une sollicitation du mode de phugoïde assez prononcée, avec effectivement une vitesse V_2 atteinte avant h_s , mais une vitesse légèrement inférieure à V_2 au passage de h_s , ce qui en toute rigueur ne permet pas la certification de l'avion. Pour ces rares simulations atypiques, il faudrait choisir un rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$ légèrement supérieur. Cependant, la vitesse au passage de la hauteur de sécurité $V(h_s)$ est, pour ces cas atypiques non majoritaires, très proche de la V_2 (erreur entre ces vitesses de moins de 1%), alors nous avons choisi de conserver pour nos simulations le critère de choix du rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$ tel que $V(\theta_2) = V_2$.

À l'aide de nos simulations numériques (Section 4, p. 83) de bimoteurs (et de quadrimoteurs) au décollage, nous avons élaboré un modèle du rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$, pour une vitesse de rotation et d'arrondi de $q=3.6^\circ/s$ (et de $q=2.5^\circ/s$ pour les quadrimoteurs). Ce modèle est fonction du taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$, de la charge alaire $\frac{m}{S}$, et de la finesse équivalente de croisière $f=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{\pi\lambda}{Cx_o}}$. Ce modèle est identifié par rapport aux simulations numériques, par la méthode des moindres carrés (Appendix C, p. 309).

Remarque 5.1 Le rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$ décroît lorsque la finesse f augmente (à iso charge alaire et iso taux de propulsion) ou lorsque le taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ augmente (à iso finesse et iso charge alaire). Cela s'explique par le fait que de fixer la charge alaire, revient à fixer la vitesse de décrochage V_{S1} , et que d'augmenter la finesse ou le taux de propulsion permet d'améliorer la pente de montée et donc de faciliter la phase aérienne $(\frac{F_{max}}{mg} = \frac{1}{f} + \gamma)$. Pour une vitesse de sécurité au décollage similaire V_2 (puisque dans la plupart des cas $V_2 = 1.13V_{S1}$), une vitesse de rotation plus faible suffit donc.

REMARQUE 5.2 Le rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$ croît lorsque la charge alaire $\frac{m}{S}$ augmente (à iso finesse et iso taux de propulsion). Pour ce phénomène je n'ai pas trouvé d'explication physique car deux effets s'opposent :

le fait que la vitesse de décrochage V_{S1} augmente lorsque la charge alaire augmente, et le fait que la vitesse de rotation V_R augmente puisque la vitesse de sécurité au décollage V_2 augmente. Les deux vitesses V_R et V_{S1} évoluant dans le même sens, il n'est pas possible de statuer sur l'évolution du rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$.

5.2.1 Modèle adapté aux bimoteurs

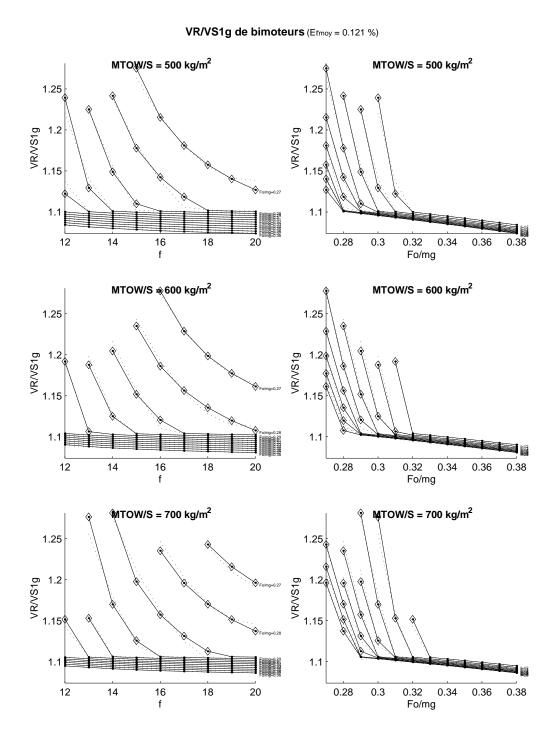


Fig. 5.4 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$. Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle du rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$ au décollage pour des bimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13 V_{S1}$

$$\begin{split} \frac{V_R}{V_{S1}} &= \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2\right) \frac{F_0}{mg} + \left(K_3 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_4 \frac{m}{S} + K_5\right) f^2 \\ &+ \left(K_6 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_7 \frac{m}{S} + K_8\right) f + \left(K_9 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_{10} \frac{m}{S} + K_{11}\right) \end{split}$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2\,min}$

$$\begin{split} \frac{V_R}{V_{S1}} &= \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \frac{F_0}{mg} + K_3 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_4\right) f^2 + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \frac{F_0}{mg} + K_7 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_8\right) f \\ &+ \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right) \end{split}$$

Mode d'obtention : identifié par les moindres carrés sur des simulations de décollage de bimoteurs (Section 4, p. 83). C'est la vitesse de rotation pour laquelle la vitesse de sécurité au décollage V_2 est obtenue en même temps que l'assiette θ_2 (Table 3.1, p. 74), pour une vitesse de tangage durant la rotation de $q=3.6^\circ/s$.

Domaine de définition : avions de transport civil. Le rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$ est donné pour des bimoteurs de taux de propulsion $0.27 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.38$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \le f \le 20$.

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.03% pour les décollages contraints en V_2 , et 0.54% pour les décollages non contraints en V_2 .

Symboles : Désignation	$\mathbf{Unit\acute{e}s}$
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o +$	_
$\Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + k_iCz^2$). Il dépend de la configura-	
tion becs/volets.	
F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.27 et 0.38 pour nos simulations	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{C x_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
M_{MTOW} qui a été désignée par m pour simplifier les notations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire, entre 500 et 700 kg/m^2 pour nos simulations	kg/m^2
\widetilde{S} : Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Section 2.2.9, p. 56)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale (cf.FAR 25.107(b/c))	m/s
V_R : Vitesse de rotation. Vitesse à laquelle le pilote tire sur le manche	m/s
pour décoller, où la roulette de nez quitte le sol.	
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s

Tab. 5.3 – Modèle du rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$ de bimoteurs

5.2.2 Modèle adapté aux quadrimoteurs

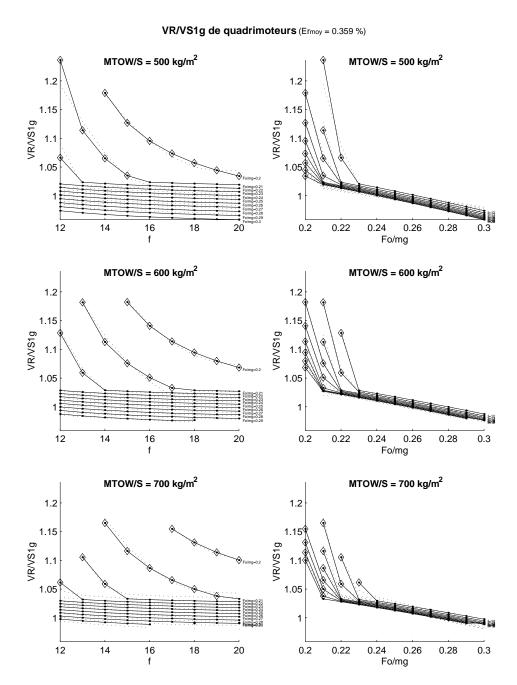


Fig. 5.5 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$. Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle du rapport des vitesses de rotation et de décrochage $\frac{V_R}{V_{S1}}$ au décollage pour des quadrimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2\,min} = 1.08 V_{S1}$

$$\begin{split} \frac{V_R}{V_{S1}} &= \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2\right) \frac{F_0}{mg} + \left(K_3 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_4 \frac{m}{S} + K_5\right) f^2 \\ &+ \left(K_6 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_7 \frac{m}{S} + K_8\right) f + \left(K_9 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_{10} \frac{m}{S} + K_{11}\right) \end{split}$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$\begin{array}{ll} \frac{V_R}{V_{S1}} & = & \left(K_1\frac{m}{S} + K_2\frac{F_0}{mg} + K_3\frac{m}{S}\frac{F_0}{mg} + K_4\right)f^2 + \left(K_5\frac{m}{S} + K_6\frac{F_0}{mg} + K_7\frac{m}{S}\frac{F_0}{mg} + K_8\right)f \\ & + \left(K_9\frac{m}{S} + K_{10}\frac{F_0}{mg} + K_{11}\frac{m}{S}\frac{F_0}{mg} + K_{12}\right) \end{array}$$

Mode d'obtention : identifié par les moindres carrés sur des simulations de décollage de quadrimoteurs (Section 4, p. 83). C'est la vitesse de rotation pour laquelle la vitesse de sécurité au décollage V_2 est obtenue en même temps que l'assiette θ_2 (Table 3.1, p. 74), pour une vitesse de tangage durant la rotation de $q=2.5^{\circ}/s$.

Domaine de définition : avions de transport civil. Le rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$ est donné pour des quadrimoteurs de taux de propulsion $0.2 \leq \frac{F_0}{mg} \leq 0.3$, de charge alaire $500 \leq \frac{m}{S} \leq 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \leq f \leq 20$.

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.3% pour les décollages contraints en V_2 , et 0.6% pour les décollages non contraints en V_2 .

r	
Symboles : Désignation	$\mathbf{Unit\acute{e}s}$
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o +$	_
$\Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + k_iCz^2$). Il dépend de la configura-	
tion becs/volets.	
F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.2 et 0.3 pour nos	_
simulations	
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	_
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
M_{MTOW} qui a été désignée par m pour simplifier les notations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire, entre 500 et 700 kg/m^2 pour nos simulations	kg/m^2
S: Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Section 2.2.9, p. 56)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale (cf.FAR 25.107(b/c))	m/s
V_R : Vitesse de rotation. Vitesse à laquelle le pilote tire sur le manche	m/s
pour décoller, où la roulette de nez quitte le sol.	
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s

TAB. 5.4 – Modèle du rapport $\frac{V_R}{V_{S1}}$ de quadrimoteurs

5.3 Modèle du rapport des vitesses de décollage et de décrochage $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$

À l'aide de nos simulations numériques (Section 4, p. 83) de bimoteurs et de quadrimoteurs au décollage, nous avons élaboré un modèle du rapport des vitesses de décollage (lift-off) et de décrochage $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$ en fonction du taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$, de la charge alaire $\frac{m}{S}$, et de la finesse équivalente de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{C x_o}}$. Ce modèle est identifié par rapport aux simulations numériques, par la méthode des moindres carrés (Appendix C, p. 309).

5.3.1 Modèle adapté aux bimoteurs

Modèle du rapport $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$ des vitesses de décollage "lift-off" et de décrochage, sans panne moteur (AEO All Engines Operating), pour des bimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13V_{S1}$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2\,min}$

$$\frac{V_{LOF}}{V_{S1}} = \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \frac{F_0}{mg} + K_3 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_4\right) f^2 + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \frac{F_0}{mg} + K_7 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_8\right) f^2 + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

Tab. 5.5 – Modèle du rapport $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$ sans panne moteur (AEO) de bimoteurs

$\begin{array}{c} \text{Modèle du rapport } \frac{V_{LOF}}{V_{S1}} \\ \text{des vitesses de décollage "lift-off" et de décrochage,} \\ \text{avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative),} \\ \text{pour des bimoteurs.} \end{array}$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2\,min} = 1.13 V_{S1}$

$$\frac{V_{LOF}}{V_{S1}} = \left(\left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \right) f^2 + \left(K_3 \frac{m}{S} + K_4 \right) f + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \right) \right) \left(\frac{F_0}{mg} \right)^2 \\
+ \left(\left(K_7 \frac{m}{S} + K_8 \right) f^2 + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \right) f + \left(K_{11} \frac{m}{S} + K_{12} \right) \right) \frac{F_0}{mg} \\
+ \left(\left(K_{13} \frac{m}{S} + K_{14} \right) f^2 + \left(K_{15} \frac{m}{S} + K_{16} \right) f + \left(K_{17} \frac{m}{S} + K_{18} \right) \right)$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2\,min}$

$$\frac{V_{LOF}}{V_{S1}} = \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \frac{F_0}{mg} + K_3 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_4\right) f^2 + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \frac{F_0}{mg} + K_7 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_8\right) f^2 + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

Mode d'obtention : identifié par les moindres carrés sur des simulations de décollage de bimoteurs (Section 4, p. 83) qui permettent d'atteindre en même temps la vitesse de sécurité au décollage V_2 et l'assiette θ_2 (Table 3.1, p. 74), pour une vitesse de tangage durant la rotation et l'arrondi de $q=3.6^{\circ}/s$.

Domaine de définition : bimoteurs civils de taux de propulsion $0.27 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.38$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \le f \le 20$.

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.005% avec panne (OEI) ou 0.05% sans panne (AEO) pour les décollages contraints en V_2 , et de 0.5% avec panne (OEI) ou 0.45% sans panne (AEO) pour les décollages non contraints en V_2 .

Symboles : Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Dépend de la confi-	_
guration becs/volets. $(Cx = Cx_o + \Delta Cx_o T_{rain} + \Delta Cx_o T_{moulinet} + k_i Cz^2)$ F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de tous les moteurs équipant l'avion	N
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion : entre 0.27 et 0.38 pour nos simulations	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
M_{MTOW} qui a été désignée par m pour simplifier les notations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire, entre 500 et 700 kg/m^2 pour nos simulations	kq/m^2
S: Surface voilure de référence	$\frac{kg/m^2}{m^2}$
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Section 2.2.9, p. 56)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale (cf.FAR 25.107(b/c))	m/s
V_{LOF} : Vitesse de décollage "lift-off" où l'avion quitte totalement le sol.	$m^{'}\!/s$
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s

Tab. 5.6 – Modèle du rapport $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$ avec panne (OEI) de bimoteurs

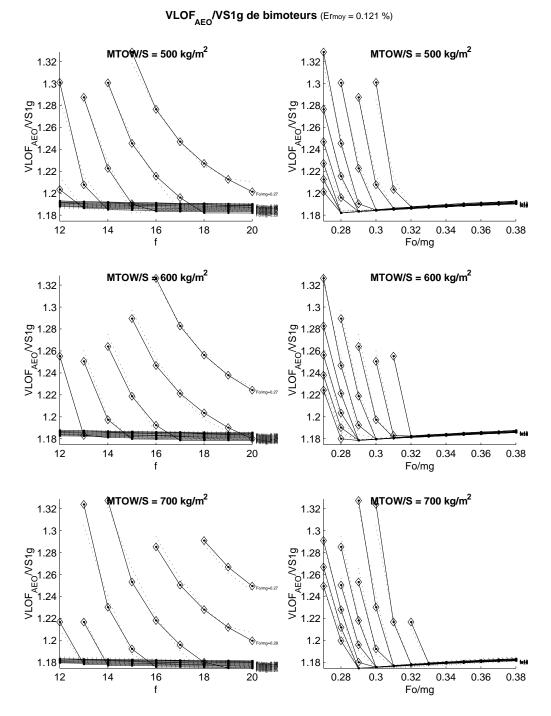


FIG. 5.6 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du rapport des vitesses de décollage "lift-off" sans panne moteur (AEO All Engines Operating) et de décrochage $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$. Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

VLOF_{OF}/VS1g de bimoteurs (Ermoy = 0.0927 %)

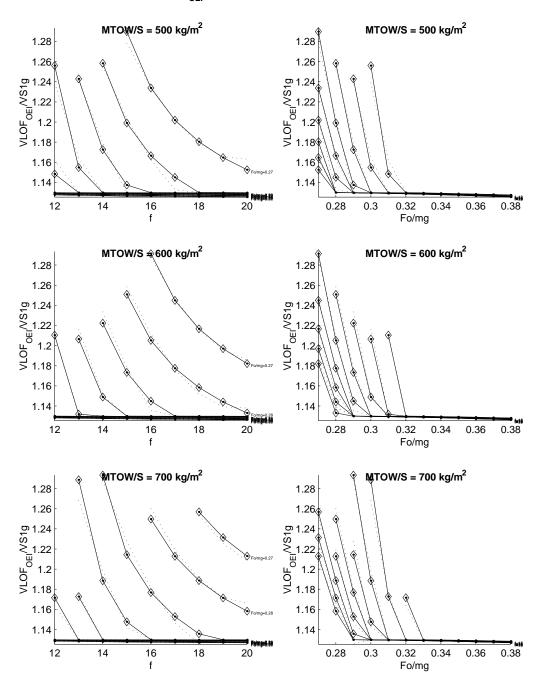


FIG. 5.7 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du rapport des vitesses de décollage "lift-off" avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative) et de décrochage $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$. Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

5.3.2 Modèle adapté aux quadrimoteurs

 $\begin{array}{c} \text{Modèle du rapport } \frac{V_{LOF}}{V_{S1}} \\ \text{des vitesses de décollage "lift-off" et de décrochage,} \\ \text{sans panne moteur (AEO All Engines Operating),} \\ \text{pour des quadrimoteurs.} \end{array}$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2\,min} = 1.08 V_{S1}$

$$\frac{V_{LOF}}{V_{S1}} = \left(\left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \right) f + \left(K_3 \frac{m}{S} + K_4 \right) \right) \frac{F_0}{mg} + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \right) f + \left(K_7 \frac{m}{S} + K_8 \right)$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2\,min}$

$$\frac{V_{LOF}}{V_{S1}} = \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \frac{F_0}{mg} + K_3 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_4\right) f^2 + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \frac{F_0}{mg} + K_7 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_8\right) + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

Tab. 5.7 – Modèle du rapport $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$ sans panne moteur (AEO) de quadrimoteurs

$\begin{array}{c} \text{Modèle du rapport } \frac{V_{LOF}}{V_{S1}} \\ \text{des vitesses de décollage "lift-off" et de décrochage,} \\ \text{avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative),} \\ \text{pour des quadrimoteurs.} \end{array}$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2\,min} = 1.08 V_{S1}$

$$\frac{V_{LOF}}{V_{S1}} = \left(\left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \right) f^2 + \left(K_3 \frac{m}{S} + K_4 \right) f + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \right) \right) \left(\frac{F_0}{mg} \right)^2 \\
+ \left(\left(K_7 \frac{m}{S} + K_8 \right) f^2 + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \right) f + \left(K_{11} \frac{m}{S} + K_{12} \right) \right) \frac{F_0}{mg} \\
+ \left(\left(K_{13} \frac{m}{S} + K_{14} \right) f^2 + \left(K_{15} \frac{m}{S} + K_{16} \right) f + \left(K_{17} \frac{m}{S} + K_{18} \right) \right)$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2\,min}$

$$\frac{V_{LOF}}{V_{S1}} = \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \frac{F_0}{mg} + K_3 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_4\right) f^2 + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \frac{F_0}{mg} + K_7 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_8\right) f^2 + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

Mode d'obtention : identifié par les moindres carrés sur des simulations de décollage de quadrimoteurs (Section 4, p. 83) qui permettent d'atteindre en même temps la vitesse de sécurité au décollage V_2 et l'assiette θ_2 (Table 3.1, p. 74), pour une vitesse de tangage durant la rotation et l'arrondi de $q = 2.5^{\circ}/s$.

Domaine de définition : quadrimoteurs civils de taux de propulsion $0.2 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.3$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \le f \le 20$.

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.02% avec panne (OEI) ou 0.07% sans panne (AEO) pour les décollages contraints en V_2 , et de 0.5% avec panne (OEI) ou 0.47% sans panne (AEO) pour les décollages non contraints en V_2 .

Symboles : Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Dépend de la confi-	_
guration becs/volets. $(Cx = Cx_o + \Delta Cx_o T_{rain} + \Delta Cx_o T_{moulinet} + k_i Cz^2)$ F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de tous les moteurs équipant l'avion	N
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion : entre 0.2 et 0.3 pour nos simulations	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 m/s^2$	m/s^2
m : Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
M_{MTOW} qui a été désignée par m pour simplifier les notations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire, entre 500 et 700 kg/m^2 pour nos simulations	$\frac{kg/m^2}{m^2}$
$\stackrel{\circ}{S}$: Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Section 2.2.9, p. 56)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale (cf.FAR 25.107(b/c))	m/s
V_{LOF} : Vitesse de décollage "lift-off" où l'avion quitte totalement le sol.	m/s
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s

Tab. 5.8 – Modèle du rapport $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$ avec panne (OEI) de quadrimoteurs

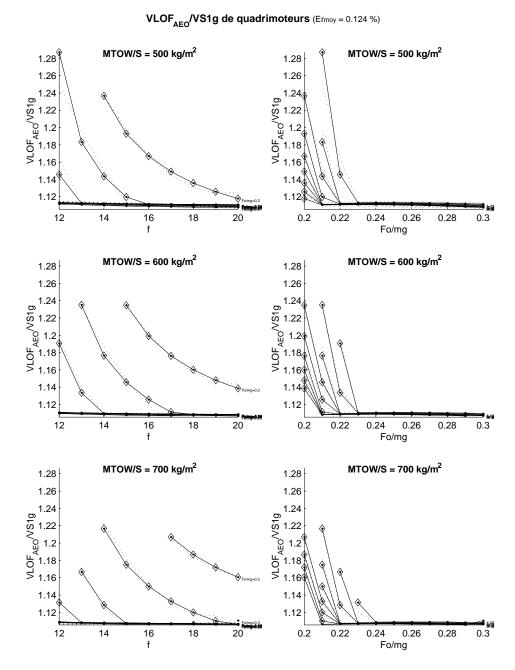


FIG. 5.8 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du rapport des vitesses de décollage "lift-off" sans panne moteur (AEO All Engines Operating) et de décrochage $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$. Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

VLOF_{OFI}/VS1g de quadrimoteurs (Ermoy = 0.0893 %) $MTOW/S = 500 \text{ kg/m}^2$ $MTOW/S = 500 \text{ kg/m}^2$ 1.25 1.25 VLOF VS19 VLOF_{OEI}/VS1g 1.1 12 0.2 0.22 0.24 0.26 0.28 0.3 16 18 Fo/mg $MTOW/S = 600 \text{ kg/m}^2$ $MTOW/S = 600 \text{ kg/m}^2$ 1.25 1.25 VLOF OEI /VS1g VLOF_{OEI}/VS1g 1.1 0.24 0. Fo/mg 12 0.2 0.22 0.26 0.28 0.3 16 18 20 $MTOW/S = 700 \text{ kg/m}^2$ $MTOW/S = 700 \text{ kg/m}^2$ 1.25 1.25 VLOF_{OEF}/VS1g VLOF_{OEI}/VS1g 1.1

FIG. 5.9 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du rapport des vitesses de décollage "lift-off" avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative) et de décrochage $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$. Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

0.2

0.22

18

12

0.24 0 Fo/mg

0.26

0.28

0.3

Chapitre 6

Le roulage



Fig. 6.1-A319 au roulage pour un décollage sur piste mouillée. Aéroport de Portland (Oregon -USA), Mai 2003. Photo : John Martin

Sommaire

6.1	Qu'a	appelle-t-on phase de roulage?
6.2	\mathbf{Mod}	élisation du roulage
6.3	Calc	ul du roulage : mode d'emploi
	6.3.1	Il faut scinder le roulage
	6.3.2	Décollage avec tous moteurs (All Engines Operating AEO) : . 126
	6.3.3	Décollage avec panne moteur (One Engine Inoperative OEI) : 126
	6.3.4	Décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO): 127
	6.3.5	L'atterrissage
6.4		olution analytique cinétique : ΔX et Δt
		en fonction de la vitesse V , pour un coefficient de frot-
		ent $\mu = cte \dots \dots$
	6.4.1	Temps de roulage Δt
	6.4.2	Distance de roulage ΔX
	6.4.3	Conclusion : résolution cinétique du roulage
6.5		blution analytique temporelle : V et ΔX
		en fonction du temps t , pour un coefficient de frotte- t $\mu=cte$
	6.5.1	Vitesse de l'avion V
	6.5.2	Distance de roulage ΔX
	6.5.2	Conclusion: Résolution temporelle du roulage
6.6	0.0.0	ur moyenne du coefficient de frottement pneu/piste à
0.0		idérer pour les modèles à $\mu = cte$
	6.6.1	Décollage : roulage en roue libre
	6.6.2	Atterrissage : freinage
6.7		olution avec un modèle du coefficient de frottement
•••		μ /piste fonction de la vitesse μ (V) 143
	6.7.1	Méthode de résolution pour un coefficient μ fonction de la vitesse 143
	6.7.2	Quelle valeur du coefficient de recalage k_{Γ} choisir? 145
	6.7.3	Robustesse du modèle recalé en accélération
	6.7.4	Conclusion : Modèle recalé en accélération
6.8	La r	otation
	6.8.1	Modèle simple de la rotation
		Longueur parcourue durant la rotation $L_{p_{r(1)}}$ 150
		Temps de la rotation $t_{p_{T\circlearrowleft}}$
	6.8.2	Extension de notre résolution cinétique à la rotation \dots 152
6.9	Roul	lage avec du vent longitudinal constant $V_w = cte$ 157
		Expression analytique de l'accélération avion 157
	6.9.2	Adaptation de la résolution cinétique
	6.9.3	Adaptation de la résolution temporelle
6.10		lication des modèles de roulage 165
		Application numérique à l'A300
	0.20.2	Données et modèles de calcul
		Cohérence de la simulation numérique et de nos modèles 168
		Estimation des décollages exigés par la norme FAR 25 168
	6.10.2	Effet des becs et volets sur le roulage
	J.10.2	Rappel aérodynamique

	Vitesses de décollage/atterrissage plus faibles	174
	Attention à la traînée!	176
	Choix des dispositifs hypersustentateurs	178
6.10.3	Incidence optimale de roulage α_r	180
	Optimum propulsif de l'incidence de roulage	181
	Optimum aérodynamique de l'incidence de roulage	181
	Optimum dynamique de l'incidence de roulage	182
	Simulation numérique et modèles d'incidence de roulage optimal	183
	Conclusion : modèle d'incidence optimale de roulage	187
6.10.4	Adaptation de la "Magic Line"	188
	Justification du terme $\overline{L_p}_{ml}$	188
	Modèle de roulage adapté de la "Magic Line"	189
6.11 Conclusion : Modèle de longueur de piste et temps de roulage 191		

Le but de ce chapitre est de déterminer l'expression de la longueur de piste au roulage L_{p_r} . Son expression contribuera, dans les chapitres suivants, à l'élaboration de la longueur de piste totale L_p au décollage ou à l'atterrissage.

Afin de bien parler de la même chose, nous commencerons d'abord par définir ce que nous entendons par "phase de roulage".

Ensuite, nous exposerons la modélisation adoptée ce qui nous conduira à une équation différentielle de Riccati (Equation 6.4, p. 120) $\frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C$, représentative d'un avion au roulage qu'il nous faudra résoudre pour trouver la longueur de piste.

Puis, nous donnerons la méthode pour calculer les cas d'études prévus pas la norme FAR 25 et nous verrons qu'il est nécessaire de considérer autant de phases de roulage qu'il y a de conditions différentes (panne de moteur, freinage, . . .). Chacune de ces phases sera étudiée entre une position initiale i et finale f.

Après quoi, nous proposerons deux types de résolution (résolution cinétique et résolution temporelle) pour un modèle sophistiqué de poussée moteur en $F_{max} = F_0 \left(1 + q_1 V + q_2 V^2\right)$, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et une incidence au roulage constante $\alpha_r = cte$.

La résolution cinétique (Section 6.4, p. 131) consiste à intégrer l'équation de Riccati selon la vitesse V de l'avion. Cela aboutit à l'expression de la distance de roulage $\Delta X = X_f - X_i$, et également du temps de roulage $\Delta t = t_f - t_i$, en fonction des vitesses initiale V_i et finale V_f de l'avion pour la portion de roulage étudiée du point initial i au point final f. La résolution temporelle (Section 6.5, p. 136) consiste à résoudre l'équation différentielle de Riccati par rapport au temps t, ce qui aboutit à l'expression de la vitesse avion V et de la distance ΔX de roulage, en fonction du temps de roulage Δt pour une vitesse initiale de roulage V_i donnée.

Pour connaître la longueur totale de piste au roulage L_{p_r} , il faudra sommer les longueurs ΔX de toutes les phases pour lesquelles les conditions de roulage sont identiques.

Ces résolutions étant faites sous couvert de l'hypothèse d'un coefficient de frottement pneu/piste μ constant, nous chercherons subséquemment quelle est la valeur moyenne de μ judicieuse à considérer puisqu'en pratique, le coefficient μ varie durant le décollage puisqu'il dépend de la vitesse V de l'avion.

Mieux encore, nous proposerons une méthode de résolution du roulage, pour un coefficient de frottement pneu/piste μ fonction de la vitesse, ce qui n'avait jamais été fait jusqu'à présent.

La phase de rotation qui est une phase particulière du roulage où le train principal de l'avion roule au sol et la roulette de nez est en l'air, sera traitée à part, puisque ces caractéristiques de roulage sont différentes (l'incidence n'est plus constante mais croît).

Le cas de vent longitudinal constant, sera également traité.

Enfin, nos modèles de roulage seront mis en œuvre pour traiter l'exemple concret d'une application numérique du décollage d'un avion de type A300 (Section 6.10, p. 165), nous quantifierons également l'effet des becs et des volets sur le roulage, déterminerons l'incidence de roulage optimale, et élaborerons une adaptation du modèle simpliste et couramment utilisé de longueur de roulage appelé "Magic Line".

Au final, nous obtiendrons (Section 6.11, p. 191) un modèle de roulage relativement simple, permettant de prendre en compte des modélisations sophistiquées de la poussée moteur ou du coefficient de frottement pneu/piste.

6.1 Qu'appelle-t-on phase de roulage?

Dans ce chapitre nous avons pour but de déterminer la longueur de piste que parcourt l'avion durant la phase de roulage. Mais rappelons exactement ce que nous entendons par "phase de roulage". Nous considérons que le roulage est la phase, durant laquelle l'avion roule sur la piste, au décollage ou au atterrissage, c'est-à-dire que des roues du train sont en contact avec la piste. Nous distinguons deux phases de roulage:

Toutes les roues au sol : Lorsque l'avion a toutes ses roues en contact avec la piste, son incidence α_r est constante, et est donnée par sa géométrie. Pour le décollage cette phase de roulage est comprise entre le début de piste où l'avion a une vitesse nulle, et l'endroit où la roulette de nez quitte la piste c'est-à-dire à la vitesse de rotation V_R .

La rotation (roulette de nez en l'air): Lors de la phase de roulage où la roulette de nez est en l'air et le train arrière continue à rouler sur la piste, l'incidence varie : c'est une phase particulière du roulage que nous appelons phase de rotation. Ceci a lieu, pour le décollage, entre la vitesse de rotation V_R et la vitesse de décollage V_{LOF} (lift-off) où l'avion quitte le sol.

S'il y a une panne moteur durant le décollage, l'étude du roulage sera scindée en plusieurs parties : d'abord, l'accélération avec tous les moteurs à poussée maximale de la vitesse nulle jusqu'à la vitesse de la panne moteur, puis

- soit une accélération avec un moteur en panne jusqu'à la vitesse de rotation V_R et la rotation de V_R à V_{LOF} ,
- soit une accélération avec un moteur en panne jusqu'à ce que le pilote réagisse, et un freinage jusqu'à l'arrêt de l'avion.

Pour l'atterrissage, une rotation est d'abord effectuée afin que toutes les roues soient en contact, et un freinage est ensuite effectué jusqu'à l'immobilisation de l'avion en bout de piste.

6.2 Modélisation du roulage

Pour déterminer la longueur de piste au roulage, nous allons utiliser le principe fondamental de la dynamique (PFD) en étudiant la somme des forces appliquées à l'avion qui est égal au produit de la masse avion m et de l'accélération Γ de l'avion en son centre de gravité par rapport à la terre.

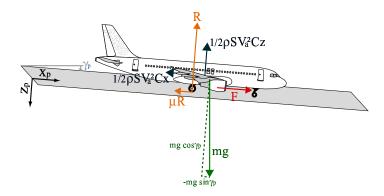


Fig. 6.2 – Forces subies par l'avion au roulage sur une piste de pente γ_p (sur cette figure $\gamma_p < 0$).

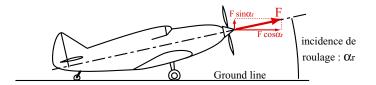


FIG. 6.3 – De part la géométrie du train d'atterrissage, l'avion présente parfois un angle d'incidence au roulage α_r avec le sol. Par conséquent la poussée des moteurs F a donc une composante en $F \cos \alpha_r$ selon l'axe de la piste, et une autre en $F \sin \alpha_r$ selon la perpendiculaire à la piste.

Système: l'avion (supposé de masse constante (Remarque 3.1, p. 70))

Référentiel : terrestre, la piste $R_p(\overrightarrow{z}_p, \overrightarrow{x}_p)$, supposé Galiléen.

Bilan des forces : – La poussée F des moteurs, portée par l'axe fuselage :

 $F\overrightarrow{x}_b = F\cos\alpha_r \overrightarrow{x}_p - F\sin\alpha_r \overrightarrow{z}_p$

- Les forces aérodynamiques de portance $-\frac{1}{2}\rho V_a^2SCz\overline{z}_a$ et de traînée $-\frac{1}{2}\rho V_a^2SCx\overline{x}_a$ exprimé dans le repère aérodynamique R_a .
- Le poids de l'avion porté par la verticale terrestre : $mg\overrightarrow{z}_o = mg(\cos\gamma_p\overrightarrow{z}_p \sin\gamma_p\overrightarrow{x}_p)$
- La réaction au sol $-R\overrightarrow{z}_p \mu R\overrightarrow{x}_p$ dont la composante parallèle à la piste est égale, d'après les lois du frottement, au produit du coefficient de frottement μ (noté μ_r quand l'avion roule librement et μ_f quand l'avion freine (Table A.2, p. 273)) et de la composante perpendiculaire R.

PFD: Appliquons le principe fondamental de la Dynamique par la somme des forces selon l'axe de piste \overrightarrow{x}_p et selon l'axe perpendiculaire à la piste \overrightarrow{z}_p .

REMARQUE 6.1 Nous supposerons qu'il n'y a pas pas de vent. La vitesse de l'air par rapport au sol, c'est-à-dire la vitesse du vent $V_w=0$. Par conséquent, la vitesse de l'avion par rapport à la terre V_k est égale à la vitesse de l'avion par rapport à l'air V_a . Nous noterons simplement par V cette même vitesse de l'avion. Les forces aérodynamiques sont donc directement exprimées dans le repère lié à la piste puisque l'avion va tout droit sur la piste $(\overrightarrow{x}_a = \overrightarrow{x}_p \text{ et } \overrightarrow{z}_a = \overrightarrow{z}_p)$. De plus, l'accélération de l'avion Γ qui est par définition la dérivée temporelle de la vitesse de l'avion par rapport à la piste, sera alors donnée par : $\Gamma = \frac{dV}{dt}$.

Le cas d'un vent longitudinal $\overrightarrow{V_w} = V_w \overrightarrow{x}_p$ sera néanmoins traité ultérieurement (Section 6.9, p. 157).

$$selon \overrightarrow{x}_{p} \qquad m\Gamma = m\frac{dV}{dt} = F\cos\alpha_{r} - \frac{1}{2}\rho V^{2}SCx - \mu R - mg\sin\gamma_{p}$$

$$selon \overrightarrow{z}_{p} \qquad 0 \qquad = mg\cos\gamma_{p} - R - \frac{1}{2}\rho V^{2}SCz - F\sin\alpha_{r} \qquad (6.1)$$

Par conséquent, l'expression de la composante perpendiculaire à la piste de la réaction au sol R est donnée par l'équation selon \overrightarrow{z}_p :

$$R = mg\cos\gamma_p - \frac{1}{2}\rho V^2 SCz - F\sin\alpha_r$$

 $^{^1\}overrightarrow{x}_a$ est selon la vitesse de l'avion par rapport à l'air et \overrightarrow{z}_a lui est perpendiculaire, dans le plan de symétrie avion. Comme nous ferons l'hypothèse d'un vent nul, cela reviendra à considérer le repère piste R_p

À l'aide de l'équation selon \overrightarrow{x}_p , l'équation qui est le coeur de la modélisation du roulage, s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m} \left(F \cos \alpha_r - \frac{1}{2} \rho V^2 S C x - \mu R - mg \sin \gamma_p \right)
= \frac{1}{m} \left(F \cos \alpha_r - \frac{1}{2} \rho V^2 S C x - \mu \left(mg \cos \gamma_p - \frac{1}{2} \rho V^2 S C z - F \sin \alpha_r \right) - mg \sin \gamma_p \right)
= \frac{1}{m} \left(F \left(\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r \right) - \frac{1}{2} \rho V^2 S \left(C x - \mu C z \right) - mg \left(\sin \gamma_p + \mu \cos \gamma_p \right) \right)$$
(6.2)

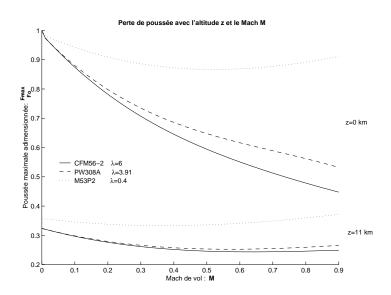


FIG. 6.4 – Décroissance de la poussée maximale du moteur avec la vitesse [Rou02].

La poussée des moteurs F décroît quand la vitesse de l'avion croît et ce, d'autant plus que le taux de dilution λ du moteur est grand (Figure 6.4, p. 119). Or, les avions de transport civil ont des taux de dilution très élevés : de l'ordre de $\lambda=6$. Par exemple, pour des Mach de décollage M=0.3, la poussée maximale que peut délivrer le moteur n'est plus que de 70% de la poussée au point fixe pour le CFM56 qui équipe entre autre le B707 et le DC8. Il est donc recommandé de considérer un modèle de la poussée fonction de la vitesse avion. La poussée maximale que peut délivrer un moteur peut se modéliser [Rou02] assez précisément par un polynôme d'ordre 2 en V dont les coefficients q_1,q_2 dépendent de l'altitude, des paramètres de conception moteur (taux de dilution λ , taux de compression ε_c , régulation $\Delta T_4,\ldots$).

$$F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2 \right) \tag{6.3}$$

REMARQUE 6.2 Attention : ici la notation utilisée est F_0 , la poussée au point fixe (à l'arrêt V=0 et au sol h=0 m) de tous les moteurs (contrairement aux notations utilisées lors de l'étude des performances moteurs [Rou02] où F_0 désignait la poussée d'un seul moteur). Donc dans le cas d'un avion équipé de N_m moteurs dont 1 en panne, la poussée au point fixe avec panne F_{0panne} s'exprimera en fonction de la poussée au point fixe sans panne F_0 de la sorte : $F_{0panne} = \frac{N_m-1}{N_m}F_0$

Alors l'équation différentielle représentative du roulage peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle non linéaire, dite de "Riccati", suivante :

$$\frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C \tag{6.4}$$

Avec:

$$A = q_2 \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r \right) - \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \left(Cx - \mu Cz \right)$$

$$B = q_1 \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r \right)$$

$$C = \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r \right) - g \left(\sin \gamma_p + \mu \cos \gamma_p \right)$$

$$Cz = Cz\alpha \left(\alpha - \alpha_0 \right) + \Delta Cz_{oSP}$$

$$Cx = Cx_0 + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + \Delta Cx_{oSP} + k_i Cz^2$$

REMARQUE 6.3 Notons que l'incidence de portance nulle α_0 et la traînée de profil Cx_o dépendent de la configuration de sortie des becs et volets adoptés. Le coefficient de traînée induite k_i en dépend également mais dans une plus faible mesure. Sa modélisation pour une aile à répartition de portance elliptique en $\frac{1}{\pi\lambda}$ suffit.

Au roulage, le train est forcément sorti et crée une traînée importante. Il faut tenir compte du coefficient de traînée de frottement induit par celui-ci ΔCx_{oTrain} , qui sur l'A300 est du même ordre de grandeur que le Cx_o de l'avion lisse!

Lorsqu'un moteur est en panne, il tourne "en moulinet" par l'air qui le traverse ce qui crée une traînée modélisable par le coefficient de traînée $\Delta Cx_{omoulinet}$.

Au freinage, la sortie des spoilers diminue la portance ce qui augmente l'appui au sol de l'avion, et augmente la traînée ce qui aide le freinage. Leur action est modélisée par les coefficients ΔCz_{oSP} et ΔCx_{oSP} .

$$\Delta Cx_{omoulinet} = cte \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{S} \tag{6.5}$$

Avec cte=0.07 et D le diamètre de la nacelle pour W.P.Dupont, et cte=0.1 et D le diamètre de l'entrée d'air du moteur pour E.Torenbeek.

L'étude (Appendix A.1.2, p. 252) de ces coefficients, dont nous exposons ci-après les principaux résultats, a permis de déterminer les cas concrets du roulage (Figure 6.5, p. 122).

En pratique, le coefficient A, qui représente l'ouverture de la parabole de l'accélération $\Gamma = AV^2 + BV + C = A\left(V - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$. Il est négatif A < 0 pour le décollage, le freinage d'un décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff), et l'atterrissage sur piste très glissante (discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$). Dans les conditions normales d'atterrissage, ce coefficient est positif A > 0.

Le coefficient B < 0 est négatif puisqu'il est égal à : $B = q_1 \widetilde{F}$ avec $q_1 < 0$ et $\widetilde{F} \ge 0$ car la poussée est toujours positive puisque la réverse ne doit pas être prise en compte pour la certification (excepté dans le cas d'un décollage interrompu sur piste mouillée, la réverse peut-être prise en compte : c'est le seul cas où $\widetilde{F} \le 0$, $B \ge 0$). Bien entendu, au freinage, le pilote réduit la poussée $\widetilde{F} \approx 0$ et donc le coefficient $B \approx 0$ est très faible.

Le coefficient C représente l'accélération de l'avion à vitesse nulle $\Gamma(V=0)$. Il est donc positif C>0 au décollage et négatif C<0 au freinage d'un décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) ou d'un atterrissage.

 $[^]a\Delta Cx_{omoulinet}$ est de l'ordre de $\Delta Cx_{omoulinet}=0.004$ pour un avion de type A330 [MS00]. E.Torenbeek [Tor86] et W.P.Dupont [Dup92] donnent un modèle de ce coefficient :

Le discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$, représentatif du polynôme de l'accélération de l'avion $\Gamma = AV^2 + BV + C$, est toujours positif $\Delta > 0$, excepté dans le cas d'un décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) ou d'un atterrissage sur piste très glissante. Plus précisément, nous montrons (Figure A.3, p. 252) qu'au freinage, le discriminant est du signe de $\mu_f f - 1$ avec la finesse de roulage f (selon la configuration de becs et volets adoptée et avec les spoilers), et le coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f .

L'accélération $\Gamma = AV^2 + BV + C = A(V - V_{\Gamma_{min}})^2 + \Gamma_{min}$ présente un maximum $\Gamma_{min} = -\frac{\Delta}{4A}$ qui est négatif $\Gamma_{min} < 0$ pour le freinage d'un décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) et l'atterrissage sur piste très glissante, et qui est positif $\Gamma_{min} > 0$ pour le décollage. Pour l'atterrissage en conditions normales, l'accélération de l'avion présente un minimum négatif $\Gamma_{min} < 0$.

Les maxima Γ_{min} ne sont en pratique jamais atteints car ils correspondent à des vitesses $V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A} < 0$ négatives, excepté pour le freinage d'un décollage interrompu sur piste mouillée où le coefficient B>0 est négatif grâce à l'utilisation de la réverse. Le minimum Γ_{min} est en revanche atteint, car correspond à une vitesse positive quasinulle $V_{\Gamma_{min}} \gtrsim 0$. Ce qui veut dire que la plus grande décélération est obtenue à la fin du

Les racines réelles $V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$ du polynôme de l'accélération $\Gamma=AV^2+BV+C$, c'est-à-dire les vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$, sont toujours de signe opposées.

Au décollage, c'est $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$ qui est positive et est heureusement toujours supérieure à la

vitesse de décollage V_{LOF} (Remarque A.3, p. 254), ce qui permet le décollage. À l'atterrissage, c'est $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$ qui est positive et est heureusement toujours supérieure à la vitesse de toucher des roues à l'atterrissage V_{TD} (Remarque A.4, p. 255), ce qui permet le freinage jusqu'à l'arrêt complet de l'avion.

Décollage	RTO Rejected-TakeOff	Atterrissage	
		piste standard	piste très glissante
A < 0	A < 0	A > 0	A < 0
B < 0	$B\lesssim 0^*$	$B \lesssim 0$	$B\lesssim 0$
C > 0	C < 0	C < 0	C < 0
$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
$\begin{array}{c} V_{\Gamma=0}^{\oplus} < 0 \\ V_{\Gamma=0}^{\ominus} > 0 \end{array}$	-	$\begin{array}{c} V_{\Gamma=0}^{\oplus} > 0 \\ V_{\Gamma=0}^{\ominus} < 0 \end{array}$	-
$V_{\Gamma=0}^{\ominus} > 0$	-	$V_{\Gamma=0}^{\ominus} < 0$	-
$V_{\Gamma_{min}} < 0$	$V_{\Gamma_{min}} \lesssim 0^*$	$V_{\Gamma_{min}} \gtrsim 0$	$V_{\Gamma_{min}} \lesssim 0$
$\Gamma_{min} > 0$	$\Gamma_{min} < 0$	$\Gamma_{min} < 0$	$\Gamma_{min} < 0$

*Lors du freinage d'un décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) sur piste mouillée, la réverse est autorisée. L'utilisation de la réverse dans ce cas, entraîne B > 0 et $V_{\Gamma_{min}} > 0$.

Tab. 6.1 – Signe des différents paramètres représentatifs de l'accélération de l'avion au roulage

Pour rendre plus explicites les expressions de A, B, C, nous pouvons introduire les notations suivantes:

$$\widetilde{F} = \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r \right)
\widetilde{T} = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \left(Cx - \mu Cz \right)
\widetilde{f}_r = g \left(\sin \gamma_p + \mu \cos \gamma_p \right)$$
(6.6)

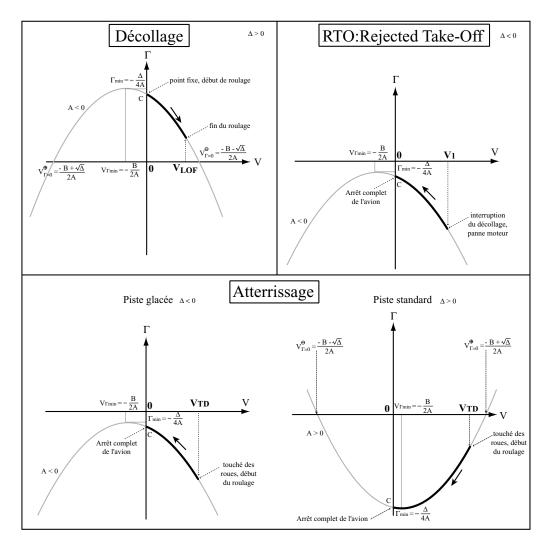


FIG. 6.5 – 'évolution de l'accélération $\Gamma = AV^2 + BV + C = A\left(V - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$ en fonction de la vitesse V de l'avion, pour les cas concrets de décollage, atterrissage et RTO (Rejected-TakeOff ou décollage interrompu). L'accélération de l'avion au roulage décrit uniquement la partie noire de la courbe et dans le sens qu'indique la flèche.

Ce qui fait que les coefficients A, B, C s'expriment :

$$\begin{array}{rcl} A & = & q_2 \ \widetilde{F} - \widetilde{T} \\ B & = & q_1 \ \widetilde{F} \\ C & = & \widetilde{F} - \widetilde{f}_r \end{array}$$

La poussée réduite \widetilde{F} représente la poussée au point fixe de tous les moteurs de l'avion F_0 , rapportée à la masse m de l'avion. Une correction en $\frac{\rho}{\rho_0}$, permet de tenir compte de l'altitude de la piste, et un autre terme en $(\cos\alpha_r + \mu\sin\alpha_r)$ permet de tenir compte des conditions de roulage l'appareil (Figure 6.3, p. 118). Étant donné que le taux de propulsion des avions de transport civil est de l'ordre de $\frac{F_0}{mg} \approx 0.21$ pour les quadrimoteurs jusqu'à

 $\frac{F_0}{mg} \approx 0.31$ pour les bimoteurs [Boi01a], l'ordre de grandeur de la poussée réduite est donc de 2 à 3. Lors du freinage, que ce soit à l'atterrissage ou lors d'un décollage interrompu (RTO Rejected-Takeoff), le pilote réduit la poussée F_{red} . Le terme de poussée réduite est alors quasi nul.

Le frottement statique réduit \tilde{f}_r , représente la force de frottement à l'arrêt μmg rapportée à la masse de l'avion m. Un terme correctif en $\cos \gamma_p$ et en $\sin \gamma_p$ permet de tenir compte de la pente de la piste γ_p . Au freinage, le coefficient de frottement pneu/piste est de l'ordre de $\mu_f \approx 0.4$, ce qui fait que le frottement statique réduit au freinage est de l'ordre de $\tilde{f}_{rf} \approx 3.9$. En roue libre, le coefficient de frottement pneu/piste est de l'ordre de $\mu_r \approx 0.015$, ce qui fait que le frottement statique réduit est dans ce cas de l'ordre de $\tilde{f}_{rr} \approx 0.147$.

La traînée réduite T représente la traînée de l'avion $\frac{1}{2}\rho SV^2Cx$ moins le frottement dynamique $\mu \frac{1}{2}\rho SV^2Cz$, le tout rapporté au carré de la vitesse sur la masse avion $\frac{V^2}{m}$. L'ordre de grandeur de la masse volumique de l'air au niveau de la piste est semblable à celle du niveau de la mer $\rho_0=1.225\ kg/m^3$. L'ordre de grandeur de la charge alaire $\frac{m}{S}$ pour les avions de transport civil est de l'ordre de $600\ kg/m^2$. Reste à déterminer l'ordre de grandeur du terme $(Cx-\mu Cz)$ qui dépend de la configuration de l'avion que ce soit du train (freinage ou non), ou des becs/volets (configuration atterrissage ou décollage). En reprenant les ordres de grandeurs des coefficients aérodynamiques des configurations d'un A300 (Table 6.11, p. 166), (Table 6.10, p. 165), on trouve :

- Décollage (configuration (1), en roue libre) : $\widetilde{T} \approx 4.68 \, 10^{-5}$ (de l'ordre de $5 \, 10^{-5}$ si accélération avec panne moteur)
- Rejected-Takeoff RTO (freinage d'un décollage interrompu, configuration (1), spoilers sortis) : $\widetilde{T} \approx 10.3\,10^{-5}$
- Atterrissage (configuration (4), freinage, spoilers sortis) : $\widetilde{T} \approx -27.7 \, 10^{-5}$

Poussée réduite à poussée max : $F_{0r} = \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} (\cos \alpha_r + \mu_r \sin \alpha_r)$ Poussée réduite au ralenti : $F_{redr} = \frac{F_{red}}{m} \frac{\rho}{\rho_0} (\cos \alpha_r + \mu_r \sin \alpha_r)$ Traînée réduite : $T_r = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} (Cx - \mu_r Cz)$ Frottement statique réduit : $T_r = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} (\cos \alpha_r + \mu_f \sin \alpha_r)$ Poussée réduite à poussée max : $F_{0f} = \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} (\cos \alpha_r + \mu_f \sin \alpha_r)$ Poussée réduite au ralenti : $F_{redf} = \frac{F_{red}}{m} \frac{\rho}{\rho_0} (\cos \alpha_r + \mu_f \sin \alpha_r)$ Traînée réduite : $T_f = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} (Cx - \mu_f Cz)$ Frottement statique réduit : $T_f = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} (Cx - \mu_f Cz)$

TAB. 6.2 – Définition des poussées réduites \widetilde{F} , traînées réduites \widetilde{T} et frottements statiques réduites $\widetilde{f_r}$, selon les cas de roulage (freinage ou en roue libre)

Le coefficient de frottement pneu/piste μ peut, dans une première approche, être considéré constant (avec le modèle sophistiqué de la poussée adopté, cela revient à des coefficients A, B et C constants). C'est ce que nous adopterons dans un premier temps pour

établir la longueur de piste au roulage. Nous procéderons par deux types de résolution : une résolution cinétique (Section 6.4, p. 131) et une résolution temporelle (Section 6.5, p. 136). Nous retrouverons alors le résultat de la résolution cinétique donnée par Vinh [Vin93, GVW69]. Quant à la résolution temporelle, jamais réalisée jusqu'à présent, nous démontrerons qu'elle est cohérente vis-à-vis de la résolution cinétique (Appendix A.3, p. 261).

Plus précisément, le coefficient de frottement μ dépend en fait de la vitesse $\mu = \mu(V)$. C'est pourquoi dans une deuxième approche, nous proposerons une résolution du roulage pour une modélisation du coefficient de frottement pneu/piste μ fonction de la vitesse de l'avion V, ce qui n'avait jamais été réalisé auparavant (Section 6.7, p. 143).

6.3 Calcul du roulage : mode d'emploi

La norme FAR 25 impose l'étude de plusieurs cas de décollage et d'atterrissage pour déterminer la longueur de piste nécessaire à l'avion pour sa certification. Ces cas sont : le décollage avec tous les moteurs (All Engines Operating), le décollage réussi malgré la panne d'un moteur au moment le plus critique (One Engine Inoperative), le décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO), et l'atterrissage. Ce paragraphe a pour but d'expliquer la méthode à employer pour calculer le roulage dans tous ces cas, c'est une sorte de mode d'emploi des modèles de roulage que nous vous proposerons dans les sections qui suivront. Nous donnerons d'abord la méthode générale de calcul du roulage, puis nous traiterons chacun des cas de décollage/atterrissage.

6.3.1 Il faut scinder le roulage

Les modèles de roulage que nous vous proposons, sont développées pour des coefficients de l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) A, B, C constants.

Or, lors du roulage de l'avion sur la piste, sauf durant la phase de rotation qui sera traitée séparément, ces coefficients sont constants par palier. Leurs valeurs changent lorsque le pilote actionne les freins et sort les spoilers, ou lorsque le régime moteur est modifié que ce soit dû à une action du pilote ou dû à une panne moteur.

Pour calculer la longueur de piste au roulage L_{p_r} et le temps t_{p_r} correspondant, il faut donc scinder le roulage en plusieurs portions afin que les coefficients A,B,C soient constants. À chaque portion sera associé un point initial d'abscisse X_i , de vitesse initiale V_i au temps t_i , et un point final d'abscisse X_f , de vitesse finale V_f , au temps t_f . La distance $\Delta X = X_f - X_i$ et le temps $\Delta t = t_f - t_i$ de roulage seront calculés pour chaque portion à l'aide des modèles proposées (Table 6.3, p. 134), (Table 6.4, p. 138).

La longueur totale de piste au roulage L_{p_r} sera obtenue en sommant les distances de roulage ΔX de toutes les portions, y compris la longueur de piste de la phase de rotation $L_{p_r\circlearrowleft}$ dont le calcul sera expliqué par la suite (Section 6.8, p. 150). De même, le temps total de roulage t_{p_r} sera obtenu en sommant les temps de roulage Δt de chaque portion et le temps de rotation $t_{p_r\circlearrowleft}$ (Section 6.8, p. 150).

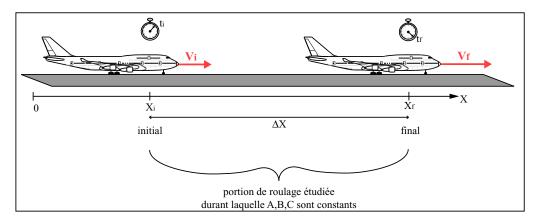


FIG. 6.6 – Portion de roulage étudiée entre le point initial d'abscisse X_i , de vitesse initiale V_i au temps t_i , et de point final d'abscisse X_f , de vitesse finale V_f , au temps t_f . La distance de roulage parcourue est $\Delta X = X_f - X_i$ et la durée du roulage est $\Delta t = t_f - t_i$.

Les paragraphes qui suivent, expliquent la manière de scinder le roulage en portions

pour les cas de décollage/atterrissage que la norme FAR 25 exige d'étudier. Ils vous donneront également les expressions de poussée réduite \widetilde{F} , traînée réduite \widetilde{T} , et frottement statique réduit $\widetilde{f_r}$, adaptées à chacune des portions, et nécessaires à l'application des modèles de roulage (Table 6.3, p. 134), (Table 6.4, p. 138).

6.3.2 Décollage avec tous moteurs (All Engines Operating AEO):

C'est le cas du décollage le plus fréquent : il n'y a pas d'incident, tous les moteurs fonctionnent. L'avion part en début de piste avec une vitesse initiale nulle $V_i=0$ et accélère jusqu'à la vitesse de rotation $V_f=V_R$ à l'aide de tous ses moteurs qui délivrent ensemble, la poussée maximale F_{max} . Il effectue ensuite sa rotation entre V_R et V_{LOF} . La distance de roulage $L_{p_{rAEO}}$ et la durée du roulage $t_{p_{rAEO}}$, sont dans ce cas données par :

$$L_{p_{rAEO}} = L_{p_{r1}} + L_{p_{r\circlearrowleft}}$$

$$t_{p_{rAEO}} = t_{p_{r1}} + t_{p_{r\circlearrowleft}}$$

La longueur $L_{p_{r_1}}$, et le temps $t_{p_{r_1}}$ sont calculées à l'aide du modèle de roulage (Table 6.3, p. 134) entre les vitesses initiale $V_i = 0$ et finale $V_f = V_R$, avec :

$$A = q_2 \widetilde{F}_{0r} - \widetilde{T}_r$$

$$B = q_1 \widetilde{F}_{0r}$$

$$C = \widetilde{F}_{0r} - \widetilde{f}_{rr}$$

$$Cz = Cz_{\alpha} (\alpha_r - \alpha_0)$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + k_i Cz^2$$

REMARQUE 6.4 Attention, l'incidence de portance nulle α_0 et le coefficient de traînée de profil Cx_o dépendent de la configuration becs et volets adoptée.

Et la rotation $L_{p_{r\circlearrowleft}}$ et $t_{p_{r\circlearrowleft}}$, sont calculées entre les vitesses V_R et V_{LOF} à l'aide du modèle (Section 6.8, p. 150).

6.3.3 Décollage avec panne moteur (One Engine Inoperative OEI):

C'est le cas du décollage pendant lequel un moteur tombe en panne au moment le plus critique. L'avion part en début de piste avec une vitesse initiale nulle $V_i=0$, et accélère à l'aide de tous ses moteurs qui délivrent la poussée maximale jusqu'à $V_f=V_{EF}$, vitesse de panne moteur critique. Il parcourt une distance $L_{p_{r1}}$ pendant un temps $t_{p_{r1}}$. Puis, un de ses moteurs tombe en panne. Il continue d'accélérer mais avec un moteur en moins. Son pilote s'aperçoit du problème moteur mais décide de continuer le décollage (la vitesse de décision V_1 étant passée). Il accélère donc encore de $V_i=V_{EF}$ à la vitesse de rotation $V_f=V_R$ avec la poussée maximale des N_m-1 moteurs restants. Il parcourt une distance $L_{p_{r2}}$ pendant un temps $t_{p_{r2}}$. Ensuite, il effectue la phase de rotation entre les vitesses V_R et V_{LOF} . La longueur de roulage totale avec panne moteur $L_{p_{rOEI}}$ et la durée associée $t_{p_{rOEI}}$ sont alors données par :

$$\begin{array}{lcl} L_{p_{rOEI}} & = & L_{p_{r1}} + L_{p_{r2}} + L_{p_{r\circlearrowleft}} \\ t_{p_{rOEI}} & = & t_{p_{r1}} + t_{p_{r2}} + t_{p_{r\circlearrowleft}} \end{array}$$

La distance $L_{p_{r_1}}$ et la durée $t_{p_{r_1}}$ de roulage sont calculées entre $V_i = 0$ et $V_i = V_{EF}$ à l'aide du modèle (Table 6.3, p. 134), avec :

$$A = q_2 \widetilde{F}_{0r} - \widetilde{T}_r$$

$$B = q_1 \widetilde{F}_{0r}$$

$$C = \widetilde{F}_{0r} - \widetilde{f}_{rr}$$

$$Cz = Cz\alpha (\alpha_r - \alpha_0)$$

$$Cx = Cx_0 + \Delta Cx_{oTrain} + k_i Cz^2$$

La distance $L_{p_{r_2}}$ et la durée $t_{p_{r_2}}$ de roulage sont calculées entre $V_i=V_{EF}$ et $V_i=V_R$ à l'aide du modèle (Table 6.3, p. 134), avec :

$$A = q_2' \frac{N_m - 1}{N_m} \widetilde{F}_{0r} - \widetilde{T}_r$$

$$B = q_1' \frac{N_m - 1}{N_m} \widetilde{F}_{0r}$$

$$C = \frac{N_m - 1}{N_m} \widetilde{F}_{0r} - \widetilde{f}_{rr}$$

$$Cz = Cz_{\alpha} (\alpha_r - \alpha_0)$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + k_i Cz^2$$

REMARQUE 6.5 En cas de panne moteur au décollage, le(s) moteur(s) restant(s) vont fonctionner en sur-régime pendant quelques minutes grâce à l'ATTCS (Automatic Takeoff Thrust Control System) cf. FAR 25.Appendix I, si l'avion en est équipé. Cela permet d'obtenir une poussée plus élevée sur les moteurs restants, et donc de faciliter le décollage, malgré la panne d'un des moteurs. Ce système se déclenche avec un délai d'environ 2 secondes, dont nous n'avons pas tenu compte, puisque nous considérons les coefficients du modèle moteur q_1' et q_2' dès la panne moteur. Pour les moteurs régulés en température, cela revient à utiliser une température d'entrée turbine opérationnelle maximale exceptionnelle (cf. [Rou02] avec $\Delta T_4 \approx 0$). Le sur-régime des moteurs restants se traduit par le changement de la valeur des coefficients q_1' et q_2' .

Remarque 6.6 Dans le cas de panne d'un moteur, celui-ci tourne avec l'air qui le traverse et crée par conséquent une traînée $\Delta Cx_{omoulinet}$ qu'il faut ajouter au Cx dans notre modélisation pour être plus précis (Equation 6.5, p. 120). L'augmentation de traînée due à la panne moteur est de l'ordre de $\Delta Cx_{omoulinet} = 0.004$ pour un moteur d'un avion de type A330 d'après [MS00].

Et la rotation $L_{p_r\circlearrowleft}$ et $t_{p_r\circlearrowleft}$, est calculée entre les vitesses V_R et V_{LOF} à l'aide du modèle (Section 6.8, p. 150).

6.3.4 Décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO):

Le décollage interrompu est une succession de phase de roulage : une accélération puis un freinage. La norme FAR 25.109 prévoit 2 cas de décollage interrompu à étudier. Bien évidemment, c'est la plus grande des deux distances qui sera retenue. En pratique c'est le décollage interrompu avec panne moteur qui est dimensionnante.

Interruption de décollage due à une panne moteur : L'avion part d'une vitesse nulle $V_i=0$, puis accélère avec la poussée maximale de tous ses moteurs jusqu'à la vitesse $V_f=V_{EF}$ où l'un des moteurs tombe en panne. Il parcourt une distance $L_{p_{r1}}$ pendant un

temps $t_{p_{r1}}$. Il continue d'accélérer avec N_m-1 moteurs à poussée maximale exceptionnelle de $V_i=V_{EF}$ à $V_f=V_{EF}+\Delta V_{EF}\leq V_1$ durant le temps que le pilote s'aperçoive de la panne et réagisse pour arrêter l'avion : en freinant, en réduisant la poussée, et en sortant les aérofreins. Le cas le plus critique², et par conséquent celui que l'on doit étudier, est pour $V_{EF}+\Delta V_{EF}=V_1$. L'avion parcourt pendant ce temps $t_{p_{r2}}$ une distance $L_{p_{r2}}$. Commence ensuite le freinage de $V_i=V_{EF}+\Delta V_{EF}$ jusqu'à l'immobilisation de l'avion $V_f=0$. L'avion freine sur une distance $L_{p_{r3}}$ pendant un temps $t_{p_{r3}}$. Ainsi la longueur de piste totale et la durée d'un décollage interrompu suite à une panne moteur, sont données par :

$$\begin{array}{lll} L_{p_{RTO}} & = & L_{p_{r1}} + L_{p_{r2}} + L_{p_{r3}} + \Delta L_{p_{r}} \\ t_{p_{RTO}} & = & t_{p_{r1}} + t_{p_{r2}} + t_{p_{r3}} + 2 \end{array}$$

La longueur ΔL_{p_r} est une distance ajoutée par la norme, que parcourrait l'avion pendant 2 secondes à la vitesse $V_1:\Delta L_{p_r}=2\,V_1$.

La distance $L_{p_{r_1}}$ et la durée $t_{p_{r_1}}$ sont calculées entre $V_i = 0$ et $V_f = V_{EF}$ à l'aide du modèle de roulage (Table 6.3, p. 134), avec :

$$A = q_2 \widetilde{F_0}_r - \widetilde{T}_r$$

$$B = q_1 \widetilde{F_0}_r$$

$$C = \widetilde{F_0}_r - \widetilde{f}_{rr}$$

$$Cz = Cz\alpha (\alpha_r - \alpha_0)$$

$$Cx = Cx_0 + \Delta Cx_0 T_{rain} + k_i Cz^2$$

La distance $L_{p_{r2}}$ parcourue pendant le temps $t_{p_{r2}}=\Delta t_{\text{réaction}}$ écoulé entre la panne moteur et la réaction du pilote, est calculée entre $V_i=V_{EF}$ et $V_f=V_{EF}+\Delta V_{EF}=V_1$ à l'aide du modèle de roulage (Table 6.3, p. 134), avec :

$$A = q_2 \frac{N_m - 1}{N_m} \widetilde{F_{0r}} - \widetilde{T}_r$$

$$B = q_1 \frac{N_m - 1}{N_m} \widetilde{F_{0r}}$$

$$C = \frac{N_m - 1}{N_m} \widetilde{F_{0r}} - \widetilde{f}_{rr}$$

$$Cz = Cz\alpha (\alpha_r - \alpha_0)$$

$$Cx = Cx_0 + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + k_i Cz^2$$

$$\begin{array}{lll} \text{pour } \Delta > 0 \text{, on a : } V_{i} & = & V_{\Gamma_{min}} + \frac{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{2} \text{ th} \left(\sqrt{-A\Gamma_{min}} \ \Delta t + \text{th}^{-1} \left(2 \frac{V_{f} - V_{\Gamma_{min}}}{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \right) \right) \\ & \text{donc } V_{EF} & = & V_{\Gamma_{min}} + \frac{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{2} \text{ th} \left(\sqrt{-A\Gamma_{min}} \ \Delta t_{\text{réaction}} + \text{th}^{-1} \left(2 \frac{V_{1} - V_{\Gamma_{min}}}{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \right) \right) \end{array}$$

Le temps de réaction du pilote en cas de panne au décollage est en moyenne, de l'ordre de $\Delta t_{\rm réaction}=0.6~s$ d'après Jacques Rosay [Ros05].

²Connaissant la vitesse de décision V_1 , la vitesse de panne critique V_{EF} peut ainsi être calculée $V_{EF} = V_1 - \Delta V_{EF}$. Généralement, ce n'est pas l'écart de variation de vitesse ΔV_{EF} qui est imposée mais un temps de réaction pilote $\Delta t_{\text{réaction}}$. Le calcul de ΔV_{EF} peut se faire facilement grâce à notre modèle de roulage par la résolution temporelle (Table 6.4, p. 138) en cherchant la vitesse initiale $V_i = V_1 - \Delta V_{EF}$, sachant que la vitesse finale vaut $V_f = V_1$ et que le temps de roulage vaut $\Delta t = \Delta t_{\text{réaction}}$.

REMARQUE 6.7 En cas de panne moteur, les autres moteurs passent automatiquement en sur-régime par le système ATTCS (Automatic Takeoff Thrust Control System cf.FAR 25.Appendix I), pour les avions qui en sont équipés. Dans le cas d'un décollage interrompu, le fait que les moteurs restants passent en sur-régime, le temps que le pilote réagisse, serait pénalisant pour la longueur de piste. En pratique, il y a un délais de déclenchement d'environ 2 secondes. Or, le pilote réagit en moins de 2 secondes pour réduire la poussée, sortir les aérofreins et freiner pour arrêter l'avion. Le système étant inhibé lorsque le pilote freine ou réduit la poussée, les moteurs ne passent donc jamais en sur-régime en cas de décollage interrompu.

La distance $L_{p_{r_3}}$ et le temps $t_{p_{r_3}}$ de freinage sont calculés entre $V_i = V_1$ et $V_f = 0$ à l'aide du modèle de roulage (Table 6.3, p. 134), avec :

$$A = q_2 \frac{N_m - 1}{N_m} \widetilde{F_{redf}} - \widetilde{T}_f$$

$$B = q_1 \frac{N_m - 1}{N_m} \widetilde{F_{redf}}$$

$$C = \frac{N_m - 1}{N_m} \widetilde{F_{redf}} - \widetilde{f}_{rf}$$

$$Cz = Cz_{\alpha} (\alpha_r - \alpha_0) + \Delta Cz_{oSP}$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + \Delta Cx_{oSP} + k_i Cz^2$$

REMARQUE 6.8 Pour mieux freiner l'avion, le pilote sort les aérofreins qui détruisent la portance et augmente la traînée. Par conséquent, il faut ajouter à la modélisation de la portance le coefficient ΔCz_{oSP} , et à celle de la traînée le coefficient ΔCx_{oSP} . Les spoilers sont bien pris en compte dans le calcul de certification du décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off). Par contre, en ce qui concerne la reverse des moteurs, elle ne doit pas être prise en compte, excepté pour le décollage interrompu sur piste mouillée.

Interruption de décollage sans panne moteur : C'est le cas où le pilote décide d'arrêter le décollage, bien qu'il n'y ait pas de panne moteur, au moment le plus critique, c'est-à-dire à la vitesse V_1 . L'avion part d'une vitesse nulle $V_i=0$ puis accélère avec la poussée maximale de tous ses moteurs jusqu'à $V_f=V_1$. Il parcourt alors une distance $L_{p_{r1}}$ pendant un temps $t_{p_{r1}}$. À cet instant, le pilote décide d'interrompre le décollage. Il freine alors de $V_i=V_1$ jusqu'à l'immobilisation de l'avion à $V_f=0$. Il parcourt une distance $L_{p_{r2}}$ pendant $t_{p_{r2}}$. La longueur de piste totale et la durée d'un décollage interrompu sans panne moteur, sont donnés par :

$$\begin{array}{lcl} L_{p_{RTO}} & = & L_{p_{r1}} + L_{p_{r2}} + \Delta L_{p_{r}} \\ t_{p_{RTO}} & = & t_{p_{r1}} + t_{p_{r2}} + 2 \end{array}$$

La longueur ΔL_{p_r} est une distance ajoutée par la norme, que parcourrait l'avion pendant 2 secondes à la vitesse $V_1:\Delta L_{p_r}=2\,V_1$.

La distance $L_{p_{r_1}}$ et le temps $t_{p_{r_1}}$ sont calculés entre $V_i=0$ et $V_f=V_1$ à l'aide du modèle de roulage (Table 6.3, p. 134), avec :

$$A = q_2 \widetilde{F_0}_r - \widetilde{T}_r$$

$$B = q_1 \widetilde{F_0}_r$$

$$C = \widetilde{F_0}_r - \widetilde{f_r}_r$$

$$Cz = Cz_{\alpha} (\alpha_r - \alpha_0)$$

$$Cx = Cx_0 + \Delta Cx_{oTrain} + k_i Cz^2$$

La distance $L_{p_{r_2}}$ et le temps $t_{p_{r_2}}$ de freinage sont calculés entre $V_i=V_1$ et $V_f=0$ à l'aide du modèle de roulage (Table 6.3, p. 134), avec :

$$A = q_2 \widetilde{F_{red}}_f - \widetilde{T}_f$$

$$B = q_1 \widetilde{F_{red}}_f$$

$$C = \widetilde{F_{red}}_f - \widetilde{f}_{rf}$$

$$Cz = Cz_{\alpha} (\alpha_r - \alpha_0) + \Delta Cz_{oSP}$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{oSP} + k_i Cz^2$$

6.3.5 L'atterrissage

Pour l'atterrissage, le roulage commence lorsque le train principal touche la piste à V_{TD} . L'avion effectue d'abord une rotation afin de mettre toutes ses roues en contact avec la piste, c'est-à-dire poser la roulette de nez. Puis, l'avion freine jusqu'à son immobilisation $V_f=0$. La longueur de piste au roulage d'un atterrissage L_{p_rAtt} , et le temps de roulage t_{p_rAtt} , s'expriment par la relation suivante :

$$\begin{array}{lcl} L_{p_{rAtt}} & = & L_{p_{r\circlearrowleft}} + L_{p_{r1}} \\ t_{p_{rAtt}} & = & t_{p_{r\circlearrowleft}} + t_{p_{r1}} \end{array}$$

La distance et le temps de l'arrondi se calculent à l'aide du modèle (Section 6.8, p. 150). La distance $L_{p_{r_1}}$ et le temps $t_{p_{r_1}}$ de freinage sont calculés entre $V_i = V_{TD}$ et $V_f = 0$ à l'aide du modèle de roulage (Table 6.3, p. 134), avec :

$$A = q_2 \widetilde{F_{red}_f} - \widetilde{T}_f$$

$$B = q_1 \widetilde{F_{red}_f}$$

$$C = \widetilde{F_{red}_f} - \widetilde{f}_{rf}$$

$$Cz = Cz\alpha (\alpha_r - \alpha_0) + \Delta Cz_{oSP}$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{oSP} + k_i Cz^2$$

Il est à noter, que la reverse ne peut pas être prise en compte pour calculer la distance d'atterrissage, ce qui est plutôt pénalisant. Par conséquent, ici F_{red} est bien positif. Par contre, les spoilers peuvent être utilisés pour le calcul de la décélération à l'atterrissage.

6.4 Résolution analytique cinétique : ΔX et Δt en fonction de la vitesse V, pour un coefficient de frottement $\mu = cte$

L'objet de cette section est d'exprimer analytiquement la distance $\Delta X = X_f - X_i$ et le temps $\Delta t = t_f - t_i$ d'une portion de roulage (Figure 6.6, p. 125), sachant que l'avion a initialement une vitesse V_i à l'abscisse X_i et au temps t_i , et atteint à la fin une vitesse V_f à l'abscisse X_f et au temps t_f .

Cette résolution est faite dans le cas d'une modélisation de la poussée maximale des moteurs $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 \, V + q_2 \, V^2\right)$ sous forme d'un polynôme d'ordre 2 en V, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, une incidence de roulage constante $\alpha_r = cte$, et une pente de la piste γ_p constante sur la portion de piste étudiée, ce qui revient à des coefficients A, B, C constants dans l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120).

L'accélération Γ étant définie comme la dérivé de la vitesse $\Gamma = \frac{dV}{dt}$, le temps de roulage Δt s'obtient par intégration $\Delta t = \int_{t_i}^{t_f} dt = \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{\Gamma}$. De même, en utilisant la définition de la vitesse $V = \frac{dX}{dt}$, la distance de roulage s'obtient par intégration $\Delta X = \int_{X_i}^{X_f} dX = \int_{t_i}^{t_f} V dt = \int_{V_i}^{V_f} \frac{V dV}{\Gamma}$. L'expression de l'accélération étant donnée par l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) $\Gamma = AV^2 + BV + C$, nous allons pouvoir déterminer l'expression analytique du temps de roulage Δt et de la distance de roulage ΔX . Nous obtiendrons alors des expressions analytiques simples de la distance de roulage ΔX et du temps de roulage Δt par intégration non pas temporelle mais selon la vitesse avion V, d'où le nom de "résolution cinétique".

6.4.1 Temps de roulage Δt

Le temps de roulage Δt de la portion de roulage étudiée, entre le temps initial t_i et le temps final t_f , se calcule par :

$$\Delta t = t_f - t_i \int_{V_c}^{V_f} \frac{dV}{A V^2 + B V + C}$$

Avec $V_i = V(t_i)$ la vitesse initiale correspondant au temps t_i , et $V_f = V(t_f)$ la vitesse finale correspondant au temps t_f .

La résolution de cette intégrale a été faite en annexe (Appendix D, p. 315), ce qui nous permet d'écrire que le temps mis par l'avion pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f , est donnée par l'expression :

Au décollage et à l'atterrissage : $(\Delta > 0)$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{\frac{2A}{B - \sqrt{\Delta}} V_f + 1}{\frac{2A}{B + \sqrt{\Delta}} V_f + 1} \cdot \frac{\frac{2A}{B + \sqrt{\Delta}} V_i + 1}{\frac{2A}{B - \sqrt{\Delta}} V_i + 1} \right|$$

Au décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) : $(\Delta < 0)$

$$\Delta t = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{2AV_f + B}{\sqrt{|\Delta|}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{2AV_i + B}{\sqrt{|\Delta|}} \right) \right)$$

Avec Δ , le discriminant : $\Delta = B^2 - 4AC$, dont le signe a été discuté en annexe (Appendix A.1.2, p. 252).

En reprenant les notations précédemment définies de l'accélération minimale et la vitesse qui lui est associée :

$$V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}$$
 $\Gamma_{min} = -\frac{\Delta}{4A}$

ainsi que les racines du polynôme de l'accélération Γ (si $\Delta > 0$) :

$$V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} \qquad V_{\Gamma=0}^{\ominus} = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$$

l'expression du temps de roulage Δt peut s'écrire :

Au décollage et à l'atterrissage : $(\Delta > 0)$

$$\Delta t = \frac{1}{A \left(V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus} \right)} \ln \left| \frac{V_f - V_{\Gamma=0}^{\oplus}}{V_f - V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \frac{V_i - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{V_i - V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \right|$$

Au décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) : $(\Delta < 0)$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{A\Gamma_{min}}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{V_f - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_i - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) \right)$$

6.4.2 Distance de roulage ΔX

La distance de roulage ΔX de la portion de roulage étudiée, entre l'abscisse initiale X_i et l'abscisse finale X_f , se calcule par :

$$\Delta X = X_f - X_i = \int_{V_i}^{V_f} \frac{VdV}{A V^2 + B V + C}$$

La résolution de cette intégrale est développée en annexe (Appendix D, p. 315) pour le cas des coefficients $A,\,B$ et C constants, et aboutit à l'expression suivante :

$$\begin{split} \int_{V_i}^{V_f} \frac{V \, dV}{A \, V^2 + B \, V + C} &= \frac{1}{2 \, A} \, \int_{V_i}^{V_f} \frac{2 \, AV + B - B}{A \, V^2 + B \, V + C} \, dV \\ &= \frac{1}{2 \, A} \, \int_{V_i}^{V_f} \frac{2 \, AV + B}{A \, V^2 + B \, V + C} \, dV - \frac{1}{2 \, A} \, \int_{V_i}^{V_f} \frac{B \, dV}{A \, V^2 + B \, V + C} \\ &= \frac{1}{2 \, A} \, \left[\ln \left| A \, V^2 + B \, V + C \right| \, \right]_{V_i}^{V_f} - \frac{B}{2 \, A} \, \underbrace{\int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{A \, V^2 + B \, V + C}}_{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2 \, A} \, \ln \left| \frac{A \, V_f^2 + B \, V_f + C}{A \, V_i^2 + B \, V_i + C} \right| - \frac{B}{2 \, A} \, \Delta t \end{split}$$

En définissant les accélérations initiale $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$, et en utilisant la définition de $V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}$, l'expression de la distance de roulage X devient :

$$\Delta X = \frac{1}{2 A} \ln \left| \frac{\Gamma_f}{\Gamma_i} \right| + V_{\Gamma_{min}} \Delta t$$

REMARQUE 6.9 Nguyen X. Vinh [Vin93] et Jean-Claude Wanner [GVW69] sont les seuls auteurs qui proposent une approche similaire avec une expression de l'accélération avion Γ sous la forme d'un polynôme d'ordre 2 en V dans l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120). N.X.Vinh propose l'expression pour $\Delta > 0$ dans laquelle il omet les valeurs absolues dans les logarithmes ln ce qui limite mathématiquement le domaine de validité de sa solution mais en fait, cela ne change rien physiquement. En effet, pour toutes portions de roulage étudiées (où A,B,C sont constants), soit l'avion freine $\Gamma < 0$, soit l'avion accélère $\Gamma > 0$, ce qui veut dire que le rapport $\frac{\Gamma_f}{\Gamma_i}$ du logarithme de l'expression ΔX est toujours positif. Par ailleurs, nous avons vu (Section A.1, p. 245) que pour pouvoir décoller ou atterrir, il faut que les vitesses initiale V_i et finale V_f soient toutes deux comprises dans l'intervalle de vitesse $\left[0; \min\left(V_{\Gamma=0}^{\ominus}, V_{\Gamma=0}^{\oplus}\right)\right]$ où $V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$ sont les racines du polynôme de l'accélération $\Gamma=AV^2+BV+C$, ce qui entraı̂ne que le terme du logarithme de l'expression de Δt est toujours positif. J.-C. Wanner propose la même expression que nous pour $\Delta > 0$. Son expression pour $\Delta < 0$ est très similaire à la nôtre mais le terme dans l'arctan est l'inverse du nôtre (il a pris le rapport inverse $\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2 A V + B}$ au lieu du nôtre $\frac{2 A V + B}{\sqrt{|\Delta|}}$). En fait, son expression et la nôtre peuvent être reliées à l'aide de la relation $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ selon le signe de x, comme cela est expliqué en annexe (Appendix D, p. 315). La formulation de J-C. Wanner nécessite de faire attention au domaine de définition (si x>0 ou si x < 0), ce qui n'est pas précisé dans son livre.

Les résultats que nous exposons, sont bien entendus validés par MAPLE (expression analytique), par MATLAB (simulation numérique), et par des manuels de formulaires mathématiques [AS74, Zwi96] comme le montre l'annexe (Appendix D, p. 315).

6.4.3 Conclusion : résolution cinétique du roulage

Résolution cinétique

de la longueur de piste ΔX et du temps Δt de roulage, pour une accélération avion de la forme

$$\Gamma = AV^2 + BV + C = A\left(V - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$$

$$\Delta X = \frac{1}{2 A} \ln \left(\frac{\Gamma_f}{\Gamma_i} \right) + V_{\Gamma_{min}} \Delta t$$

Au décollage et à l'atterrissage : $(\Delta > 0)$

$$\Delta t = \frac{1}{A \left(V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus} \right)} \ln \left(\frac{\overline{V_f}^{\oplus} - 1}{\overline{V_f}^{\ominus} - 1} \frac{\overline{V_i}^{\ominus} - 1}{\overline{V_i}^{\ominus} - 1} \right)$$

Au décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) : $(\Delta < 0)$

$$\Delta t = \frac{signe(A)}{\sqrt{A\Gamma_{min}}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{V_f - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_i - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) \right)$$

$$\begin{array}{lll} \Delta &= B^2 - 4AC & \overline{V}^{\oplus} &= \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\oplus}} & \text{et } \overline{V}^{\ominus} = \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus} &= \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} & V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A} \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus} &= \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} & \Gamma_{min} = -\frac{\Delta}{4A} \end{array}$$

$$A = q_{2} \widetilde{F} - \widetilde{T}$$

$$B = q_{1} \widetilde{F}$$

$$C = \widetilde{F} - \widetilde{f_{r}}$$

$$Cz = Cz_{\alpha} (\alpha_{r} - \alpha_{0}) + \Delta Cz_{oSP}$$

$$\widetilde{F} = \frac{F_{0}}{m} \frac{\rho}{\rho_{0}} (\cos \alpha_{r} + \mu \sin \alpha_{r})$$

$$\widetilde{T} = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} (Cx - \mu Cz)$$

$$\widetilde{f_{r}} = (\sin \gamma_{p} + \mu \cos \gamma_{p}) g$$

 $Cz = Cz_{\alpha} (\alpha_r - \alpha_0) + \Delta Cz_{oSP}$ $Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + \Delta Cx_{oSP} + k_i Cz^2$

Mode d'obtention : Analytique par intégration cinétique de l'équation de Riccati (Equa-

tion 6.4, p. 120): $\Delta X = \int_{V_i}^{V_f} \frac{V dV}{\Gamma}$ et $\Delta t = \int_{V_i}^{V_f} \frac{V}{\Gamma}$. **Domaine de définition :** Tout avion au roulage. Il faut scinder le roulage en autant de

portions qu'il y a de phase où l'avion change de mode de fonctionnement c'est-à-dire dès lors que l'avion sort des spoilers, freine ou a une panne moteur, Car à chacun de ces changements, la valeur des coefficients A, B, C est modifiée et nos formules ne sont valables que lorsque ces coefficients sont constants.

Précision : Ce modèle a été obtenu par une résolution analytique exacte, sans aucune approximation, dans le cadre des hypothèses d'une poussée moteur modélisée par $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2\right)$ et dirigée selon l'axe du fuselage, une incidence au roulage constante $\alpha_r = cte$, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et une pente de la piste $\gamma_p = cte$ supposée constante sur toute la portion de roulage étudiée.

Tab. 6.3 – Résolution cinétique

A, B, C: Coefficients du polynôme représentant l'accélération avion Γ (Equation 6.4, p. 120) dont le sens physique et dont les signes ont été discutés précédemment (Table 6.1, p. 121). Le coefficient A est le paramèter d'ouverture de la parabole représentant l'accélération Γ en fonction de la vitesse V (Figure A.1, p. 246). Si A > 0, alors la parabole est ouverte vers le basil. Le coefficient C représente la valeur de l'accélération statique C = Γ(V − 0). Au décollage, le coefficient C > 0 est positif. À l'atterrissage, il est négatif C < 0. b: Envergure de la vollure c'est-à-dire la distance entre les extrémités des alles Cz: Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz: Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz: Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz: Coefficient de trainée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptie. Fo: Poussée au point fixe (altitude et viteses mulles) des N _m moteurs. Si l'in des N _m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par V _{m-1} . F: Poussée au point fixe (altitude et viteses mulles) des N _m moteurs. Si l'in des N _m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par V _{m-1} . F: Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121) J: F: Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121) M/s² g; coefficient de trainée induite k _i = ½/3, q, q; Coefficient de trainée induite k _i = ½/3, q, q; Coefficient de trainée induite k _i = ½/3, q, q; Coefficient de trainée induite k _i = ½/3, q, q; Coefficient de trainée de poussée (Équation 6.3, p. 119) M/s m/s² M/s misses de l'avion M/s m/s² V; V; V; Vitesse initiale V; et finale V _f de la portion de roulage étudiée. V ⁿ m/s	Symboles : Désignation	${f Unit\'es}$
ont été discutés précédemment (Table 6.1, p. 121). Le coefficient A est le paramètre d'ouverture de la parabole représentant l'accélération Γ en fonction de la vitesse V (Figure A.1, p. 246). Si $A > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (et inversement pour $A < 0$, la parabole est ouverte vers le haut (et inversement pour $A < 0$, la parabole est ouverte vers le bas). Le coefficient C représente la valeur de l'accélération statique $C = \Gamma(V = 0)$. Au décollage, le coefficient $C > 0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C < 0$. C is Envergure de la voilure $C > 0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C < 0$. C is Envergure de la voilure $C > 0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C < 0$. C coefficient de portance de l'avion au roulage. C coefficient de portance de l'avion au roulage. C coefficient de trainée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. $F_0 : P$ oussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m-1}{N_m}$. $\widetilde{F} : P$ oussée réduite (Equation 6.6, p. 121) N_m is N_m in the service of N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par N_m in N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par N_m in N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par N_m in N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par N_m in N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par N_m in N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par N_m in N_m in N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par N_m in N_m in N_m moteurs est panne est parabole est N_m moteurs. N_m in N	A,B,C : Coefficients du polynôme représentant l'accélération avion Γ	
Paccelération Γ en fonction de la vitesse V (Figure A.1, p. 246). Si $A > 0$, abora la parabole est ouverte vers le haut (et inversement pour $A < 0$, la parabole est ouverte vers le bas). Le coefficient C représente la valeur de l'accelération statique $C = \Gamma(V = 0)$. Au décollage, le coefficient $C > 0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C < 0$. b : Envergure de la voilure c'est-à-dire la distance entre les extrémités des ailes $C : Coefficient de trainée de l'avion au roulage. C : Coefficient de trainée de l'avion au roulage. C : Coefficient de trainée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. Fi : Poussée au point fixe (altitude et vitesse milles) des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par \frac{N_m-1}{N_m}. \tilde{F} : Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121) m : Masse de l'avion m : Mas$		
Si $A > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (let inversement pour $A < 0$, la parabole est ouverte vers le bas). Le coefficient C représente la valeur de l'accélération statique $C = \Gamma(V = 0)$. Au décollage, le coefficient $C > 0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C < 0$. b : Envergure de la voilure c 'est-à-dire la distance entre les extrémités des ailes C : Coefficient de traînée de l'avion au roulage. C 2: Coefficient de portance de l'avion au roulage. C 3: Coefficient de traînée de l'avion au roulage. C 5: Coefficient de traînée de l'avion au roulage. C 5: Coefficient de traînée de l'avion au roulage. C 5: Coefficient de traînée de l'avion au roulage. C 7: Coefficient de traînée de l'avion au roulage. C 7: Coefficient de traînée de l'avion au roulage. C 8: Coefficient de traînée de l'avion au roulage. C 9: Poussée avoin fix e (altitude et vitesse nulles) des N_m moteurs. Sì l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m - 1}{N_m}$. Fi : Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121) m/s^2		
représente la valeur de l'accélération statique $C = \Gamma(V = 0)$. Au décollage, le coefficient $C > 0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C < 0$. b : Envergure de la voilure c'est-à-dire la distance entre les extrémités des ailes C_x : Coefficient de traînée de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de traînée de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. Fo : Poussée au point fixe (altitude et vitesse mulles) des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m-1}{N_m}$. F : Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121) m/s^2 g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 m/s^2$ m/s^2 m/s		
décollage, le coefficient $C>0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C<0$. b : Envergure de la voilure c'est-à-dire la distance entre les extrémités des ailes Cx : Coefficient de traînée de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de traînée de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. F_0 : Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m-1}{N_m}$. \tilde{F} : Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121) g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$ g : Coefficient et traînée induite $k_i = \frac{1}{2}$ q_1, q_2 : Coefficients du modèle de poussée (Équation 6.3, p. 119) m/s^2 $m/$		
négatif $C<0$. b E Envergure de la voilure c'est-à-dire la distance entre les extrémités des ailes Cx : Coefficient de traînée de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance avec l'incidence Cz : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. F_0 : Poussée au point fixe (altitude et vitesse mulles) des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m-1}{N_m}$. F : Prottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121) f : Poussée réduite un modèle de poussée (Équation 6.3, p. 119) f : Si Surface voilure f : Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121) f : Vi Vitesse initiale V_1 et finale V_2 de la portion de roulage étudiée. f : Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121) f : Vi Vitesse initiale V_1 et finale V_2 de la portion de roulage étudiée. f : Vi Vitesse pour lesquelles l'accélération est nulle f = 0 pour f > 0 · $V_{\Gamma=0}^{\infty} = \frac{1}{-B\sqrt{\Delta}}$. Vi Vitesse pour laquelle l'accélération f = f		
des ailes Cx : Coefficient de traînée de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance de l'avion au roulage. Cz : Coefficient de portance avec l'incidence Cz_{κ} : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. F_0 : Poussée au point fixe (altitude et vitesse mulles) des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m-1}{N_m}$. \widetilde{F} : Proussée réduite (Equation 6.6, p. 121) m/s^2 f_r : Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121) m/s^2		
$Cx: \text{Coefficient de traînée de l'avion au roulage.} \\ Cz: \text{Coefficient de portance de l'avion au roulage.} \\ Czo: \text{Coefficient de coefficient de portance avec l'incidence} \\ Cxo: \text{Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volte adoptée.} \\ F_0: \text{Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des } N_m moteurs.} \\ Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par N_m=1. \tilde{F}: \text{Poussée réduite} \text{ (Equation 6.6, p. 121)} \\ f_F: \text{Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121)} \\ m/s^2 \\ g: \text{Constante de gravité terrestre } g\approx 9.81 m/s^2 \\ m/s^2 \\ k_i: \text{Coefficients du modèle de poussée (Équation 6.3, p. 119)} \\ m: \text{Masse de l'avion} \\ S: \text{Surface voilure} \\ \tilde{T}: \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \\ m/s^2 \\ $		m
$Cz_0: \text{Gradient de coefficient de portance avec l'incidence} \\ Cx_0: \text{Coefficient de trainée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.} \\ F_0: \text{Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des } N_m moteurs.} \\ Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par \frac{N_m-1}{N_m-1}. \tilde{F}: \text{Proussée} réduite (Equation 6.6, p. 121) $		
$Cx_0: \text{Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. F_0: Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par \frac{N_m-1}{N_m}. \tilde{F}: Prottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121) $		J−1
$F_0: \text{ Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des } N_m \text{ moteurs.}$ Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m-1}{N_m-1}$. $\tilde{F}: \text{ Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m/s^2$ $\tilde{f}r: \text{ Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m/s^2$ $g: \text{ Constante de gravité terrestre } g \approx 9.81 m/s^2 \qquad m/s^2$ $k_i: \text{ Coefficient de trainée induite } k_i = \frac{1}{1-N}$ $q_1, q_2: \text{ Coefficients du modèle de poussée (Équation 6.3, p. 119)} \qquad (m/s)^{-1} \text{ et } (m/s)^{-2}$ $m: \text{ Masse de l'avion} \qquad kg \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad m^2$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 121)} \qquad \Gamma = \Gamma_{min} \text{ et minimale si } A > m/s$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 120)} \qquad \Gamma = \Gamma_{min} \text{ et minimale si } A > m/s$ $\tilde{T}: \text{ Trainée réduite (Equation 6.6, p. 120)} \qquad \Gamma = \Gamma_{min} \text{ et minimale si } A > m$	-	raa -
Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m-1}{N_m}$. \widetilde{F} : Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121) \widetilde{f}_Γ : Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121) g : Constante de gravité terrestre $g\approx 9.8$ m/s^2 g : Constante de gravité terrestre $g\approx 9.8$ m/s^2 g : Coefficient de traînée induite $k_i = \frac{1}{A}$ q_1, q_2 : Coefficients du modèle de poussée (Équation 6.3, p. 119) m : Masse de l'avion S : Surface voilure \widetilde{T} : Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121) V_i, V_j : Vitesse initiale V_i et finale V_f de la portion de roulage étudiée. $V_{\Gamma=0}^{\theta}$: Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$ pour $\Delta>0$: $V_{\Gamma=0}^{\phi}=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V_{\Gamma=0}^{\phi}=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. V_{Γ} vitesse pour laquelle l'accélération $\Gamma=\Gamma_{min}$ est minimale si $A>m/s$ 0 ou maximale si $A<0$. $V_{\Gamma min}=-\frac{D}{2A}$ α_i : Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118) α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. Δ : Discriminant $\Delta=B^2-4AC$. Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). ΔCx_o : Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage $\Delta Cx_o x_{T-xin}$, au moteur en panne $\Delta Cx_o moulinet$, à la sortie des spoilers ΔCx_{OSP} ΔCz_{OSP} : Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers ΔCx_{OSP} ΔCz_{OSP} : Augmentation de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : $\Gamma=AV^2+BV+C$ avec A,B,C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$. Γ_m : Λ : Accélération minimale si Λ > 0 ou maximale si Λ < 0. Γ_m :	dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.	3.7
$\begin{array}{lll} \widehat{F}: & \text{Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m/s^2 \\ \widehat{f}_{\Gamma}: & \text{Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121)} & m/s^2 \\ g: & \text{Constante de gravité terrestre g} \approx 9.81 m/s^2 \\ k_i: & \text{Coefficient de traînée induite } k_i = \frac{1}{1\Delta} \\ q_1, q_2: & \text{Coefficients du modèle de poussée (Équation 6.3, p. 119)} & m/s^2 \\ m: & \text{Masse de l'avion} & m/s^2 \\ S: & \text{Surface voilure} & m/s^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 12n.} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 12n.} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée reduite (Equation 6.6, p. 12n.} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 12n.} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 12n.} & m^2 \\ \widehat{T}: & \text{Traînée reduite (Equation 6.6, p. 12n.} & m^2 \\ \widehat{T}: & $	F_0 : Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier	N
$\begin{array}{ll} \widehat{f_{\Gamma}}: \text{ Frottement statique réduit } & \text{Equation 6.6, p. 121}) \\ g: \text{ Constante de gravité terrestre } g \approx 9.81 m/s^2 \\ k_{1}: \text{ Coefficient de trainée induite } k_{1} = \frac{1}{I} \\ q_{1}, q_{2}: \text{ Coefficients du modèle de poussée } & \text{ Equation 6.3, p. 119}) \\ m: \text{ Masse de l'avion} \\ S: \text{ Surface voilure} \\ \widehat{T}: \text{ Trainée réduite } & \text{ Equation 6.6, p. 121}) \\ V_{1}, V_{1}; \text{ Vitesse initiale } V_{1} \text{ et finale } V_{1} \text{ de la portion de roulage étudiée.} \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus}, V_{\Gamma=0}^{\ominus}: \text{ Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle \Gamma=0 pour \Delta>0: V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2A} et V_{\Gamma=0}^{\ominus}=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{2A}. V_{\Gamma} wites se pour laquelle l'accélération \Gamma=\Gamma_{min} est minimale si A>0 ou maximale si A<0. V_{\Gamma_{min}}=\frac{B}{2A}. V_{\Gamma} incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118) V_{\Gamma} rad V_{\Gamma} constante de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration V_{\Gamma} el partie decollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage et des spoilers \Delta Cx_{OSP} augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage \Delta Cx_{OTrain}, au moteur en panne \Delta Cx_{omoulinet}, à la sortie des spoilers \Delta Cx_{OSP} augmentation du coefficient de portance due aux spoilers \Delta CX_{OSP} is a vitesse finale V_{I}. \Delta CX_{OSP} is a vitesse finale V_{I} in a priste, modélisée par : \Gamma = AV^2 + BV + C avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération minimale si \Delta CX_{OSP} $	par $\frac{N_m-1}{N_m}$.	
$k_i: \text{Coefficient de traînée induite } k_i = \frac{1}{T\Delta}$ $q_1, q_2: \text{Coefficients du modèle de poussée (Équation 6.3, p. 119)}$ $m: \text{Masse de l'avion}$ $S: \text{Surface voilure}$ $\widetilde{T}: \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)}$ $V_i, V_f: \text{Vitesse initiale } V_i \text{ et finale } V_f \text{ de la portion de roulage étudiée.}$ $V_{\Gamma=0}^{\mathbb{R}}, V_{\Gamma=0}^{\mathbb{R}} : \text{Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle \Gamma=0 pour \Delta>0:V_{\Gamma=0}^{\mathbb{R}} = \frac{m/s}{2\Delta} V_{\Gamma_{min}}: \text{Vitesse pour laquelle l'accélération \Gamma=\Gamma_{min} est minimale si A>0 ou maximale si A<0. V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}. \alpha_r: \text{Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)} \alpha_0: \text{Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.} \Delta: \text{Discriminant } \Delta = B^2 - 4AC. \text{ Généralement positif pour le décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245).} \Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage \Delta Cx_{\sigma Train}, au moteur en panne \Delta Cx_{\sigma moulinet}, à la sortie des spoilers \Delta Cx_{\sigma SP} \Delta Cz_{\sigma SP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers} \Delta t: \text{Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f. \Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f. \Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : \Gamma = AV^2 + BV + C avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée \Gamma_i = \Gamma(V_i) et l'accélération finale \Gamma_f = \Gamma(f_f). \Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \Gamma_{min} = \frac{\pi}{4A} \gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante} \lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S} \mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste}: \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues} \text{libres}: \mu_f \approx 0.4 po$		
$k_i: \text{Coefficient de traînée induite } k_i = \frac{1}{T\Delta}$ $q_1, q_2: \text{Coefficients du modèle de poussée (Équation 6.3, p. 119)}$ $m: \text{Masse de l'avion}$ $S: \text{Surface voilure}$ $\widetilde{T}: \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)}$ $V_i, V_f: \text{Vitesse initiale } V_i \text{ et finale } V_f \text{ de la portion de roulage étudiée.}$ $V_{\Gamma=0}^{\mathbb{R}}, V_{\Gamma=0}^{\mathbb{R}} : \text{Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle \Gamma=0 pour \Delta>0:V_{\Gamma=0}^{\mathbb{R}} = \frac{m/s}{2\Delta} V_{\Gamma_{min}}: \text{Vitesse pour laquelle l'accélération \Gamma=\Gamma_{min} est minimale si A>0 ou maximale si A<0. V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}. \alpha_r: \text{Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)} \alpha_0: \text{Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.} \Delta: \text{Discriminant } \Delta = B^2 - 4AC. \text{ Généralement positif pour le décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245).} \Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage \Delta Cx_{\sigma Train}, au moteur en panne \Delta Cx_{\sigma moulinet}, à la sortie des spoilers \Delta Cx_{\sigma SP} \Delta Cz_{\sigma SP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers} \Delta t: \text{Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f. \Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f. \Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : \Gamma = AV^2 + BV + C avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée \Gamma_i = \Gamma(V_i) et l'accélération finale \Gamma_f = \Gamma(f_f). \Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \Gamma_{min} = \frac{\pi}{4A} \gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante} \lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S} \mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste}: \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues} \text{libres}: \mu_f \approx 0.4 po$		m/s^2 m/s^2
$\begin{array}{lll} m: \text{Masse de l'avion} & kg \\ S: \text{Surface voilure} & \tilde{T}: \text{Trainée réduite} & (\text{Equation } 6.6, \text{ p. } 121) \\ V_i, V_f: & \text{Vitesse initiale } V_i \text{ et finale } V_f \text{ de la portion de roulage étudiée.} \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus}, V_{\Gamma=0}^{\ominus}: & \text{Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$ pour $\Delta>0$: $V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. \\ V_{\Gamma_{min}}: & \text{Vitesse pour laquelle l'accélération } F=\Gamma_{min}$ est minimale si $A>$ m/s$ \\ 0 ou maximale si $A<0. V_{\Gamma_{min}}=-\frac{B}{2A}$. \\ \alpha_{\Gamma}: & \text{Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)} \\ \alpha_{0}: & \text{Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.} \\ \Delta: & & \text{Discriminant } \Delta=B^2-4AC.$ & \text{Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). \\ \Delta Cx_o: & \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage $\Delta Cx_{\sigma Train}$, au moteur en panne $\Delta Cx_{\sigma moulinet}$, à la sortie des spoilers $\Delta Cx_{\sigma SP}$ Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers $\Delta t: \text{Temps \'eoul\'e aur roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f. $$ A: Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f. $$ Is a vitesse finale V_f. $$ Is a piste, modélisée par : $\Gamma=AV^2+BV+C$ avec A,B,C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i=\Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f=\Gamma(V_f)$. $$ $$ Pente de la piste, supposée constante $$\lambda: Allongement de la voilure $\lambda=\frac{\frac{V}{S}}{B}$ $\mu: Coefficient de frottement pneu/piste: $\mu_r\approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f\approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). $$ $$ $$ $$ $$ $$ $$ $$ $$ $$ $$ $$ $$$		·
$\begin{array}{c} S: \text{Surface voilure} \\ \widetilde{T}: \text{Trainée réduite} & \text{Equation 6.6, p. 121}) \\ V_i, V_f: \text{Vitesse initiale V_i et finale V_f de la portion de roulage étudiée.} \\ N_{\Gamma=0}^{\oplus}, V_{\Gamma=0}^{\oplus}: \text{Racines rédelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$ pour $\Delta>0: V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. \\ V_{\Gamma_{min}}: \text{Vitesse pour laquelle l'accélération $\Gamma=\Gamma_{min}$ est minimale si $A>$ ou maximale si $A<0. V_{\Gamma_{min}}=-\frac{D}{2A}$. \\ \alpha_r: \text{Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)} & rad \\ \alpha_0: \text{Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration $Bec/Volet adoptée.} \\ \Delta: \text{Discriminant $\Delta=B^2-4AC$. Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). \\ \Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage $\Delta Cx_o T_{rain}$, au moteur en panne $\Delta Cx_{omoulinet}$, à la sortie des spoilers $\Delta Cx_o s_P$ \\ \Delta Cz_{oSP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers} \\ \Delta t: \text{Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale V; à la vitesse finale V_f. \\ \Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : $\Gamma=AV^2+BV+C$ avec A,B,C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i=\Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f=\Gamma(V_f)$. \\ \Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si $A>0$ ou maximale si $A<0. $\Gamma_{min}=\frac{A}{4A}$ ap: Pente de la piste, supposée constante $\lambda: \text{Allongement de la voilure $\lambda=\frac{b^2}{S}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste: $\mu_r\approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f\approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). \\ \rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste} $\lambda = \frac{b}{2}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste} $\lambda = \frac{b}{2}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste} $\lambda = \frac{b}{2}$ $\mu:$		
$\begin{array}{c} \tilde{T}: \text{Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)} & m^{-1} \\ V_i, V_f: \text{Vitesse initiale } V_i \text{ et finale } V_f \text{ de la portion de roulage étudiée.} & m/s \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus}, V_{\Gamma=0}^{\oplus}: \text{Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle \Gamma=0 pour \Delta>0: V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{\Gamma=0}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2}. \\ V_{\Gamma_{min}}: \text{Vitesse pour laquelle l'accélération } \Gamma=\Gamma_{min} \text{ est minimale si } A>0 \text{ ou maximale si } A<0. V_{\Gamma_{min}}=-\frac{B}{2A}. \\ \alpha_r: \text{Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)} & rad \\ \alpha_0: \text{Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.} \\ \Delta: \text{Discriminant } \Delta=B^2-4AC. \text{ Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). \\ \Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage } \Delta Cx_{\sigma Train}, \text{ au moteur en panne } \Delta Cx_{omoulinet}, \text{ à la sortie des spoilers } \Delta Cx_{\sigma SP} \\ \Delta Cz_{\sigma SP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers} \\ \Delta t: \text{Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f. \\ \Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : } \Gamma=AV^2+BV+C \text{ avec } A, B, C \text{ constants } (\text{Equation } 6.4, \text{ p. } 120). \text{ Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée } \Gamma_i=\Gamma(V_i) \text{ et l'accélération finale } \Gamma_f=\Gamma(V_f). \\ \Gamma_{min}: \text{ Accélération minimale si } A>0 \text{ ou maximale si } A<0. \Gamma_{min}=\frac{\Delta}{4A} \\ \gamma_p: \text{ Pente de la piste, supposée constante} \\ \lambda: \text{ Allongement de la voilure } \lambda=\frac{b^2}{5} \\ \mu: \text{ Coefficient de frottement pneu/piste : } \mu_r\approx 0.015 \text{ pour les roues libres, } \mu_f\approx 0.4 \text{ pour le freinage } (\text{Table A.2, p. } 273). \\ \rho: \text{ Masse volumique de l'air au niveau de la piste} \\ kg/m^3 \\ \end{array}$		$rac{kg}{m^2}$
$\begin{array}{ll} V_{\Gamma=0}^{\oplus}, V_{\Gamma=0}^{\ominus} : \text{Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire viteses} \\ \text{pour lesquelles l'accélération est nulle } \Gamma=0 \text{ pour } \Delta>0 : V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} \\ \end{array}$ $V_{\Gamma_{min}} : \text{Vitesse pour laquelle l'accélération } \Gamma=\Gamma_{min} \text{ est minimale si } A>0 \text{ ou maximale si } A<0 . V_{\Gamma_{min}}=\frac{-B}{2A}. \end{array}$ $V_{\Gamma_{min}} : \text{Vitesse pour laquelle l'accélération } \Gamma=\Gamma_{min} \text{ est minimale si } A>0 \text{ ou maximale si } A<0 . V_{\Gamma_{min}}=\frac{-B}{2A}. \end{array}$ $\alpha_{r} : \text{Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)} \qquad rad$ $\alpha_{0} : \text{Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.} $ $\Delta: \text{Discriminant } \Delta=B^{2}-4AC. \text{ Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). $ $\Delta Cx_{o} : \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage } \Delta Cx_{oTrain}, \text{ au moteur en panne } \Delta Cx_{omoulinet}, \text{ à la sortie des spoilers } \Delta Cx_{oSp} $ $\Delta Cz_{oSp} : \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers} $ $\Delta t : \text{Temps } \text{\'ecoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_{i} \text{ à la vitesse finale } V_{f}. $ $\Delta X : \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_{i} à la vitesse finale V_{f}. \Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : \Gamma = AV^{2} + BV + C \text{ avec } A, B, C \text{ constants} (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée \Gamma_{i} = \Gamma(V_{i}) \text{ et l'accélération finale} \Gamma_{f} = \Gamma(V_{f}). \Gamma_{min} : \text{Accélération minimale si } A>0 \text{ ou maximale si } A<0. \Gamma_{min} = \frac{m/s^{2}}{4A} \gamma_{p} : \text{Pente de la piste, supposée constante} \lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^{2}}{S} \mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste} : \mu_{r} \approx 0.015 \text{ pour les roues} libres, \mu_{f} \approx 0.4 \text{ pour le freinage} (\text$	\widetilde{T} : Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)	m^{-1}
pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$ pour $\Delta>0:V_{\Gamma=0}^{\sigma}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. $V_{\Gamma=i0}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. $V_{\Gamma=i0}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. $V_{\Gamma=in}$: Vitesse pour laquelle l'accélération $\Gamma=\Gamma_{min}$ est minimale si $A>m/s$ 0 ou maximale si $A<0$. $V_{\Gamma_{min}}=-\frac{B}{2A}$. α_r : Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118) rad α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. Δ : Discriminant $\Delta=B^2-4AC$. Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). $\Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage \Delta Cx_{\sigma Train}, au moteur en panne \Delta Cx_{omoulinet}, à la sortie des spoilers \Delta Cx_{oSP} \Delta Cz_{oSP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers} \Delta t: \text{Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i à la vitesse finale V_f. \Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale } V_i à la vitesse finale V_f. \Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : \Gamma = AV^2 + BV + C avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée \Gamma_i = \Gamma(V_i) et l'accélération finale \Gamma_f = \Gamma(V_f). \Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A>0 \text{ ou maximale si } A<0. \Gamma_{min} = \frac{m/s^2}{4A} \gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante} rad \lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b}{S} \mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste}: \mu_r\approx 0.015 \text{ pour les roues} libres, \mu_f\approx 0.4 pour le freinage (Table A.2, p. 273). \rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$	V_i, V_f : Vitesse initiale V_i et finale V_f de la portion de roulage étudiée.	' .
$\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{V\Gamma_{min}} \text{ et } V_{\Gamma=0}^{\odot} = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}.$ $V_{\Gamma_{min}} \text{ : Vitesse pour laquelle l'accélération } \Gamma = \Gamma_{min} \text{ est minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}.$ $\alpha_r \text{ : Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)} \qquad rad$ $\alpha_0 \text{ : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.}$ $\Delta \text{ : Discriminant } \Delta = B^2 - 4AC. \text{ Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245).$ $\Delta Cx_o \text{ : Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage \Delta Cx_{oTrain}, au moteur en panne \Delta Cx_{omoulinet}, à la sortie des spoilers \Delta Cx_{oSP} \Delta Cz_{oSP} \text{ : Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers} \Delta t \text{ : Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f. \Delta X \text{ : Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f. \Gamma \text{ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : \Gamma = AV^2 + BV + C avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée \Gamma_i = \Gamma(V_i) et l'accélération finale \Gamma_f = \Gamma(V_f). \Gamma_{min} \text{ : Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \Gamma_{min} = \frac{m/s^2}{\frac{1}{2A}} \gamma_p \text{ : Pente de la piste, supposée constante} \lambda \text{ : Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b}{S} \mu \text{ : Coefficient de frottement pneu/piste : } \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues libres, } \mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage} (Table A.2, p. 273).} \rho \text{ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$	$V_{\Gamma=0}^{\circ}$, $V_{\Gamma=0}^{\circ}$: Racines reelles du polynome de l'acceleration, c'est-a-dire vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$ pour $\Delta>0$: $V_{\Gamma=0}^{\circ}=$	m/s
0 ou maximale si $A < 0$. $V_{\Gamma_{min}} = -\frac{2A}{2A}$. α_r : Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118) α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. Δ : Discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$. Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). $\Delta Cx_o : \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage \Delta Cx_{oTrain}, au moteur en panne \Delta Cx_{omoulinet}, à la sortie des spoilers \Delta Cx_{oSP} \Delta Cz_{oSP}: Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers \Delta t: Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f. \Delta X: Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f. \Gamma: Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : \Gamma = AV^2 + BV + C avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée \Gamma_i = \Gamma(V_i) et l'accélération finale \Gamma_f = \Gamma(V_f). \Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \Gamma_{min} = \frac{m}{4A} \gamma_p : \text{Pente de la piste, supposée constante} \lambda : \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S} \mu : \text{Coefficient de frottement pneu/piste} : \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues} libres, \mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage} (Table A.2, p. 273). \rho : \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$	$\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus} = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$.	
$\alpha_r: \text{Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)} \qquad rad \\ \alpha_0: \text{Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de } \\ la configuration Bec/Volet adoptée. \\ \Delta: \text{Discriminant } \Delta = B^2 - 4AC. \text{ Généralement positif pour le } \\ décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). \\ \Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train } \\ d'atterrissage \Delta Cx_{oTrain}, au moteur en panne \Delta Cx_{omoulinet}, à la sortie des spoilers \Delta Cx_{oSP} Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers \Delta t: \text{Temps \'ecoul\'e au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f. \\ \Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f. \\ \Gamma: \text{Accél\'eration de l'avion en son centre de gravit\'e, par rapport à la piste, modélisée par : \Gamma = AV^2 + BV + C avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$. \\ \Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \Gamma_{min} = \frac{m/s^2}{4A} \gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante} \lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S} \mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste}: \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues} libres, $\mu_f \times 0.4 \times 0.4 \times 0.00 \times 1.00 \times 1$	$V_{\Gamma_{min}}$: Vitesse pour laquelle l'accélération $\Gamma = \Gamma_{min}$ est minimale si $A > 0$	m/s
$\alpha_0: \text{Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.} \\ \Delta: \text{Discriminant } \Delta = B^2 - 4AC. \text{ Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). \\ \Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage } \Delta Cx_{oTrain}, \text{ au moteur en panne } \Delta Cx_{omoulinet}, \text{ à la sortie des spoilers } \Delta Cx_{oSP} \\ \Delta Cz_{oSP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers } \Delta t: \text{Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f. \\ \Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f. \\ \Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : } \Gamma = AV^2 + BV + C \text{ avec } A, B, C \text{ constants} $ (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$. $\Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \Gamma_{min} = \frac{m/s^2}{\frac{-\Delta}{4A}}$ $\gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante}$ $\lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste : } \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues}$ libres, $\mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage (Table A.2, p. 273).}$ $\rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$	0 ou maximale si $A < 0$. $V_{\Gamma_{min}} = -\frac{2}{2A}$. α_r : Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)	rad
$\Delta: \text{Discriminant } \Delta = B^2 - 4AC. \text{ Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). \Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage } \Delta Cx_oT_{rain}, \text{ au moteur en panne } \Delta Cx_{omoulinet}, \text{ à la sortie des spoilers } \Delta Cx_{oSP} \Delta Cz_{oSP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers} \Delta t: \text{Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f. \Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f. \Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : } \Gamma = AV^2 + BV + C \text{ avec } A, B, C \text{ constants} (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée \Gamma_i = \Gamma(V_i) et l'accélération finale \Gamma_f = \Gamma(V_f). \Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \Gamma_{min} = \frac{m/s^2}{\frac{-\Delta}{4A}} \gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante} \lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S} \mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste : } \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues libres, } \mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage (Table A.2, p. 273).} \rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste} kg/m^3$	α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de	rad
décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245). $\Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage } \Delta Cx_{oTrain}, \text{ au moteur en panne } \Delta Cx_{omoulinet}, \text{ à la sortie des spoilers } \Delta Cx_{oSP}$ $\Delta Cz_{oSP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers}$ $\Delta t: \text{Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f.$ $\Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f.$ $\Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : } \Gamma = AV^2 + BV + C \text{ avec } A, B, C \text{ constants}$ (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i) \text{ et l'accélération finale } \Gamma_f = \Gamma(V_f).$ $\Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \Gamma_{min} = \frac{m/s^2}{\frac{AA}{4A}}$ $\gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante}$ $\lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste : } \mu_T \approx 0.015 \text{ pour les roues libres, } \mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage (Table A.2, p. 273).}$ $\rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$ kg/m^3		
p. 245). $\Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage } \Delta Cx_{oTrain}, \text{ au moteur en panne } \Delta Cx_{omoulinet}, \text{ à la sortie des spoilers }} \Delta Cx_{oSP}$ $\Delta Cz_{oSP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers}$ $\Delta t: \text{Temps \'ecoul\'e au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f.$ $\Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse } m \text{ initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f.$ $\Gamma: \text{Acc\'el\'eration de l'avion en son centre de gravit\'e, par rapport à la piste, mod\'elis\'ee par: } \Gamma = AV^2 + BV + C \text{ avec } A, B, C \text{ constants}$ (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudi\'ee, l'acc\'el\'eration initiale est not\'ee $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'acc\'elération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f).$ $\Gamma_{min}: \text{Acc\'el\'eration minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \ \Gamma_{min} = \frac{m/s^2}{\frac{-\Delta}{4A}}$ $\gamma_p: \text{Pente de la piste, suppos\'ee constante}$ $\lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste}: \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues}$ libres, $\mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage (Table A.2, p. 273)}.$ $\rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$		
$\Delta Cx_o: \text{Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train d'atterrissage } \Delta Cx_{oTrain}, \text{ au moteur en panne } \Delta Cx_{omoulinet}, \text{ à la sortie des spoilers } \Delta Cx_{oSP}$ $\Delta Cz_{oSP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers}$ $\Delta t: \text{Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f.$ $\Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale } V_i \text{ à la vitesse finale } V_f.$ $\Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : } \Gamma = AV^2 + BV + C \text{ avec } A, B, C \text{ constants}$ $(\text{Equation } 6.4, \text{ p. } 120). \text{ Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée } \Gamma_i = \Gamma(V_i) \text{ et l'accélération finale } \Gamma_f = \Gamma(V_f).$ $\Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \Gamma_{min} = \frac{m/s^2}{4A}$ $\gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante}$ $\lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste : } \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues}$ $\text{libres, } \mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage (Table A.2, p. 273).}$ $\rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$	- · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
la sortie des spoilers ΔCx_{oSP} ΔCz_{oSP} : Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers Δt : Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f . ΔX : Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f . Γ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : $\Gamma = AV^2 + BV + C$ avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f).$ Γ_{min} : Accélération minimale si $A > 0$ ou maximale si $A < 0$. $\Gamma_{min} = m/s^2$ $\frac{-\Delta}{4A}$ γ_p : Pente de la piste, supposée constante λ : Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$ μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste	÷ ,	
$\Delta Cz_{oSP}: \text{Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers} \\ \Delta t: \text{Temps \'ecoul\'e au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f.} \\ \Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f.} \\ \Gamma: \text{Acc\'el\'eration de l'avion en son centre de gravit\'e, par rapport à la piste, mod\'elis\'ee par : $\Gamma = AV^2 + BV + C$ avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'acc\'el\'eration initiale est not\'ee $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'acc\'el\'eration finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$.} \\ \Gamma_{min}: \text{Acc\'el\'eration minimale si $A > 0$ ou maximale si $A < 0$. $\Gamma_{min} = \frac{-\Delta}{4A}$ $\gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante} $\gamma_p: \text{Pente de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste}: $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273).} $\rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste} $\rho: \Delta V = V_f = V$		
tiale V_i à la vitesse finale V_f . ΔX : Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale V_f . Γ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : $\Gamma = AV^2 + BV + C$ avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$. Γ_{min} : Accélération minimale si $A > 0$ ou maximale si $A < 0$. $\Gamma_{min} = \frac{M}{4A}$ γ_p : Pente de la piste, supposée constante λ : Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$ μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste m		
$\Delta X: \text{Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse} \qquad m$ initiale V_i à la vitesse finale V_f . $\Gamma: \text{Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la} \qquad m/s^2$ piste, modélisée par : $\Gamma = AV^2 + BV + C$ avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$. $\Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \ \Gamma_{min} = \frac{m/s^2}{\frac{-\Delta}{4A}}$ $\gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante}$ $\lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste}: \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues}$ libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). $\rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$		s
initiale V_i à la vitesse finale V_f . Γ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par : $\Gamma = AV^2 + BV + C$ avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$. $\Gamma_{min} : \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \ \Gamma_{min} = \frac{-\Delta}{4A}$ $\gamma_p : \text{Pente de la piste, supposée constante}$ $\lambda : \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu : \text{Coefficient de frottement pneu/piste : } \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues}$ $\text{libres, } \mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage (Table A.2, p. 273).}$ $\rho : \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$	•	m
piste, modélisée par : $\Gamma = AV^2 + BV + C$ avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$. $\Gamma_{min} : \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \ \Gamma_{min} = \frac{-\Delta}{4A}$ $\gamma_p : \text{Pente de la piste, supposée constante}$ rad $\lambda : \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu : \text{Coefficient de frottement pneu/piste} : \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues}$ libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). $\rho : \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste}$ kg/m^3	initiale V_i à la vitesse finale V_f .	
(Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f = \Gamma(V_f)$. $\Gamma_{min} : \text{Accélération minimale si } A > 0 \text{ ou maximale si } A < 0. \ \Gamma_{min} = \frac{-\Delta}{4A}$ $\gamma_p : \text{Pente de la piste, supposée constante} \qquad rad$ $\lambda : \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu : \text{Coefficient de frottement pneu/piste} : \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues}$ libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). $\rho : \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste} \qquad kg/m^3$		m/s^2
$\Gamma_f = \Gamma(V_f).$ $\Gamma_{min}: \text{Accélération minimale si } A>0 \text{ ou maximale si } A<0. \ \Gamma_{min} = \frac{-\Delta}{4A}$ $\gamma_p: \text{Pente de la piste, supposée constante} \qquad rad$ $\lambda: \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S}$ $\mu: \text{Coefficient de frottement pneu/piste}: \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues}$ $\text{libres, } \mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage (Table A.2, p. 273)}.$ $\rho: \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste} \qquad kg/m^3$	(Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée,	
Γ_{min} : Accélération minimale si $A>0$ ou maximale si $A<0$. $\Gamma_{min}=m/s^2$ $\frac{-\Delta}{4A}$ γ_p : Pente de la piste, supposée constante rad λ : Allongement de la voilure $\lambda=\frac{b^2}{S}$ μ : Coefficient de frottement pneu/piste: $\mu_r\approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f\approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste kg/m^3		
$\begin{array}{c} \frac{-\Delta}{4A} \\ \gamma_p : \text{Pente de la piste, supposée constante} \\ \lambda : \text{Allongement de la voilure } \lambda = \frac{b^2}{S} \\ \mu : \text{Coefficient de frottement pneu/piste} : \mu_r \approx 0.015 \text{ pour les roues} \\ \text{libres, } \mu_f \approx 0.4 \text{ pour le freinage (Table A.2, p. 273).} \\ \rho : \text{Masse volumique de l'air au niveau de la piste} \\ kg/m^3 \end{array}$	Γ_{min} : Accélération minimale si $A>0$ ou maximale si $A<0$. $\Gamma_{min}=$	m/s^2
λ : Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$ μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste kg/m^3	$\frac{-\Delta}{4A}$	mad
μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273). ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste kg/m^3		тии
ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste kg/m^3	μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues	
ρ . Masse volumique de l'an au inveau de la piste $\kappa q/m^2$		ka/m3
ρ_0 : Masse volumique au niveau de la mer : $\rho_0=1.225\ kg/m^3$	$ ho_0$: Masse volumique au niveau de la mer: $ ho_0=1.225\ kg/m^3$	$\frac{kg/m}{kg/m^3}$

6.5 Résolution analytique temporelle : V et ΔX en fonction du temps t, pour un coefficient de frottement $\mu = cte$

L'objet de cette section est d'exprimer analytiquement la vitesse de l'avion V et la distance $\Delta X = X - X_i$ de roulage, comme des fonctions du temps de roulage $\Delta t = t - t_i$, sachant qu'initialement, au temps t_i , l'avion est à l'abscisse X_i avec une vitesse initiale V_i donnée. Cette résolution est faite dans le cas d'une poussée moteur modélisée par $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 \, V + q_2 \, V^2\right)$, d'une incidence au roulage constante $\alpha_r = cte$, d'un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et d'une pente de piste constante $\gamma_p = cte$ sur la portion de roulage ΔX étudiée, ce qui revient à des coefficients A, B, C constants dans l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) : $\frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C$. Nous allons d'abord résoudre cette équation différentielle, ce qui aboutira à l'expression de la vitesse de l'avion V. Une intégration temporelle permettra ensuite d'en déduire la distance de roulage ΔX . Nous obtiendrons alors un modèle de la vitesse avion V et de la longueur de piste ΔX au roulage, fonctions du temps de roulage Δt et de la vitesse initiale de roulage V_i , qui est bien entendu cohérent avec la résolution cinétique comme le montre (Appendix A.3, p. 261).

6.5.1 Vitesse de l'avion V

L'expression de la vitesse V de l'avion au roulage en fonction du temps, peut être obtenue par la résolution de l'équation différentielle de Riccati (Equation 6.4, p. 120) :

$$\frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C$$

Pour résoudre une équation différentielle, plusieurs méthodes sont en général proposées dans les ouvrages de mathématiques, pour des formes répertoriées, mais cela devient plus délicat lorsque l'on sort des "sentiers battus". On procède alors à tâtons pour trouver la forme qui conviendrait. Pour les équations différentielles de Riccati, il est conseillé de trouver une solution particulière, et ensuite d'appliquer une méthode décrite dans les ouvrages de mathématiques³ pour trouver la solution générale. C'est en procédant de la sorte, en cherchant une solution particulière, que j'ai eu la chance de trouver une fonction, qui, comme démontré (Appendix D.5, p. 324), constitue en fait la solution générale de l'équation différentielle que nous cherchons à résoudre (Equation 6.4, p. 120) dans le cas de A, B, C constants.

La résolution de cette équation différentielle de Riccati, nous permet de déterminer l'expression de la vitesse de roulage de l'avion (Appendix A.2, p. 255) :

– Dans le cas d'un décollage ou atterrissage ($\Delta>0$ et V_i comprise entre les racines $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$) :

$$V = V_{\Gamma_{min}} + \frac{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{2} \operatorname{th} \left(-\sqrt{-A\Gamma_{min}} \Delta t + \operatorname{th}^{-1} \chi \right)$$

- Dans le cas du freinage d'un décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) ou

³Si f est solution particulière, alors le changement de fonction y = f + 1/z revient à une équation linéaire, dite de Bernoulli, déterminant z.

d'un atterrissage sur piste très glissante ($\Delta < 0$) :

$$\begin{split} Vit &= V_{\Gamma_{min}} + \sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}} \tan \left(\sqrt{A \Gamma_{min}} \Delta t + \tan^{-1} \chi \right) \\ &\text{avec} \quad \chi = \sqrt{\left| \frac{A}{\Gamma_{min}} \right|} \left(V_i - V_{\Gamma_{min}} \right) \quad \text{si } \Delta > 0, \, \text{on a aussi } \chi = 2 \frac{V_i - V_{\Gamma_{min}}}{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \\ &\Delta = B^2 - 4AC \qquad \qquad \overline{V}^{\oplus} = \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\oplus}} \quad \text{et } \overline{V}^{\ominus} = \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \\ &V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad \qquad V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A} \\ &V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad \qquad \Gamma_{min} = -\frac{\Delta}{4A} \end{split}$$

6.5.2 Distance de roulage ΔX

La distance $\Delta X = X - X_i$ de la portion de roulage considérée, est la différence de l'abscisse courante X de l'avion à l'instant t, et de l'abscisse initiale X_i à l'instant initial t_i . L'expression analytique de cette distance ΔX s'obtient par intégration⁴ de la vitesse V(t) obtenue précédemment.

$$\Delta X = X - X_i = \int_{t_i}^t V(\tilde{t})d\tilde{t}$$

La résolution de cette intégrale (Appendix A.2, p. 255), permet d'obtenir l'expression analytique de la distance de roulage ΔX , dans le cas du décollage et de l'atterrissage :

$$\Delta X = V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln \left| \cosh \left(-\sqrt{-A\Gamma_{min}} \Delta t + \tanh^{-1} \chi \right) \sqrt{1 - \chi^2} \right|$$

et dans le cas du freinage d'un décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) ou d'un atterrissage sur piste très glissante :

$$\Delta X = V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln \left| \cos \left(\sqrt{A \Gamma_{min}} \Delta t + \tan^{-1} \chi \right) \sqrt{1 + \chi^2} \right|$$

⁴Dans cette expression on voit apparaître un \tilde{t} . Ce n'est pas une nouvelle notation mais seulement un artifice mathématique pour intégrer, car la borne supérieure de l'intégrale n'est autre que le temps t.

6.5.3 Conclusion : Résolution temporelle du roulage

Résolution temporelle

de la vitesse V et de la longueur de piste ΔX au roulage pour une accélération avion de la forme

$$\Gamma = AV^2 + BV + C = A\left(V - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$$

Cas du décollage ou atterrissage

(discriminant $\Delta>0$ et vitesse initiale V_i comprise entre les racines $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$ et $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$)

$$\begin{split} V &= V_{\Gamma_{min}} + \frac{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{2} \, \operatorname{th} \left(-\sqrt{-A\Gamma_{min}} \Delta t + \operatorname{th}^{-1} \chi \right) \\ \Delta X &= V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln \left| \operatorname{ch} \left(-\sqrt{-A\Gamma_{min}} \Delta t + \operatorname{th}^{-1} \chi \right) \sqrt{1 - \chi^2} \right| \end{split}$$

Cas du décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) ou atterrissage sur piste très glissante (discriminant $\Delta<0)$

$$\begin{split} V &= V_{\Gamma_{min}} + \sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}} \tan \left(\sqrt{A \Gamma_{min}} \Delta t + \tan^{-1} \chi \right) \\ \Delta X &= V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln \left| \cos \left(\sqrt{A \Gamma_{min}} \Delta t + \tan^{-1} \chi \right) \sqrt{1 + \chi^2} \right| \end{split}$$

Avec
$$\chi = \sqrt{\left|\frac{A}{\Gamma_{min}}\right|} \left(V_i - V_{\Gamma_{min}}\right) \quad \text{si } \Delta > 0, \text{ on a aussi } \chi = 2\frac{V_i - V_{\Gamma_{min}}}{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}$$

$$V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad V_{\Gamma_{min}} = -\frac{A}{4A}$$

$$A = q_2 \tilde{F} - \tilde{T} \qquad \qquad \tilde{F} = \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r\right)$$

$$B = q_1 \tilde{F} \qquad \qquad \tilde{T} = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \left(Cx - \mu Cz\right)$$

$$C = \tilde{F} - \tilde{f}_r \qquad \qquad \tilde{f}_r = \left(\sin \gamma_p + \mu \cos \gamma_p\right) g$$

$$Cz = Cz\alpha \left(\alpha_r - \alpha_0\right) + \Delta Cz_{oSP}$$

$$Cz = Cz\alpha \left(\alpha_r + \Delta Cz_{oSP} + \Delta Cz_{oSP} + \mu Cz_{oSP$$

Mode d'obtention: Analytique par résolution temporelle de l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) (Appendix A.2, p. 255).

Domaine de définition : Tout avion au roulage. Scindez le roulage en autant de portions qu'il y a de phase où l'avion change de mode de fonctionnement c'est-à-dire dès lors que l'avion sort les spoilers, freine ou a une panne moteur, \dots Car à chacun de ces changements, la valeur des coefficients A,B,C est modifiée et nos formules ne sont valables que lorsque ces coefficients sont constants.

Précision : Ce modèle a été obtenue par une résolution analytique exacte, sans aucune approximation, dans le cadre des hypothèses d'une poussée moteur modélisée par $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2\right)$ et dirigée selon l'axe du fuselage, une incidence au roulage constante $\alpha_r = cte$, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et une pente de la piste $\gamma_p = cte$ supposée constante sur toute la portion de roulage étudiée.

Tab. 6.4 – Résolution temporelle

Symboles : Désignation $A,B,C : \text{Coefficients du polynôme représentant l'accélération avion } \Gamma$	Unités m^{-1} , s^{-1} et m/s^2
(Equation 6.4, p. 120) dont le sens physique et dont les signes ont été discutés précédemment (Table 6.1, p. 121). Le coeffi-	
cient A est le paramètre d'ouverture de la parabole représentant l'accélération Γ en fonction de la vitesse V (Figure A.1, p. 246).	
Si $A>0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (et inversement	
pour $A < 0$, la parabole est ouverte vers le bas). Le coefficient C représente la valeur de l'accélération statique $C = \Gamma(V = 0)$. Au	
décollage, le coefficient $C > 0$ est positif. À l'atterrissage, il est	
négatif $C < 0$.	
b : Envergure de la voilure c'est-à-dire la distance entre les extrémités des ailes	m
Cx: Coefficient de traı̂née de l'avion au roulage.	
Cz: Coefficient de portance de l'avion au roulage. $Cz\alpha$: Gradient de coefficient de portance avec l'incidence	rad^{-1}
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il	raa
dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.	A.r.
F_0 : Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m-1}{N_m}$.	N
\widetilde{F} : Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121)	m/s^2
\widetilde{f}_r : Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121)	m/s^2
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$ k_i : Coefficient de traînée induite $k_i = \frac{1}{\pi \lambda}$	m/s^2
n_i . Coefficient de trainée induite $n_i = \frac{1}{\pi \lambda}$ m : Masse de l'avion	kg
q_1, q_2 : Coefficients du modèle de poussée (Equation 6.3, p. 119)	$(m/s)^{-1} \det_{m^2} (m/s)^{-2}$
S : Surface voilure \widetilde{T} : Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)	m^2 m^{-1}
V: Vitesse au temps t de l'avion par rapport à la piste (vent supposé	m/s
nul), exprimée au centre de gravité avion.	
V_i : Vitesse initiale de roulage de la portion de roulage étudiée. $V_{\Gamma=0}^{\oplus}, V_{\Gamma=0}^{\ominus}$: Vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$, c'est-à-dire	$m/s \ m/s$
les racines réelles du polynôme de l'accélération, pour $\Delta>0$:	me, e
$V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus} = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. $V_{\Gamma_{min}}$: Vitesse pour laquelle l'accélération $\Gamma = \Gamma_{min}$ est minimale si $A > 0$. Ver $A = \frac{B}{2A}$.	m/s
0 ou maximale si $A < 0$. $V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}$. α_r : Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)	rad
α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de	rad
la configuration Bec/Volet adoptée. Δ : Discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$. Généralement positif pour le	
décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un	
décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245).	
ΔCx_o : Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train	
d'atterrissage ΔCx_{oTrain} , au moteur en panne $\Delta Cx_{omoulinet}$, à	
la sortie des spoilers ΔCx_{oSP} ΔCz_{oSP} : Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers	
Δt : Temps de roulage	s
ΔX : Distance parcourue par l'avion au roulage durant le temps Δt en ayant comme vitesse initiale V_i .	m
Γ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par (Equation 6.4, p. 120).	m/s^2
Γ_{min} : Accélération minimale si $A>0$ ou maximale si $A<0$. $\Gamma_{min}=\frac{-\Delta}{2}$	m/s^2
γ_p : Pente de la piste, supposée constante sur la portion de roulage étudiée	rad
λ : Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$	
μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273).	
ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste	kg/m^3
$ ho_0$: Masse volumique au niveau de la mer : $ ho_0=1.225kg/m^3$	kg/m^3

6.6 Valeur moyenne du coefficient de frottement pneu/piste à considérer pour les modèles à $\mu = cte$

Les modèles de roulage que nous avons précédemment développés (résolution cinétique et temporelle), ont été développés dans l'hypothèse d'un coefficient de frottement pneu/piste μ constant durant tout le roulage. Or en pratique, ce coefficient de frottement μ dépend de la vitesse (Appendix A.5, p. 272), donc varie durant le roulage. Dans cette section, nous allons évaluer l'erreur faite en le supposant constant, et déterminer quelle est la valeur moyenne de ce coefficient μ à considérer pour estimer correctement le temps et la longueur de piste au roulage.

Pour cela, nous allons calculer par intégration numérique, la longueur de roulage $L_{p_T(\mu_f(V))}$ et le temps de roulage $t_{p_T(\mu_f(V))}$, obtenus avec un modèle du coefficient de frottement pneu/piste fonction de la vitesse $\mu=\mu(V)$. Nous choisirons, le modèle recalé d'A.Lausetti ($k_p=2\ 10^{-4}$) pour le décollage (Equation A.4, p. 273), et le modèle d'A.Lausetti avec notre modélisation de la vitesse W (Equation A.10, p. 287) pour le freinage.

Nous allons comparer ces distances et temps de roulage ainsi obtenus, avec les longueurs $L_{p_T(\mu_f=cte)}$ et temps $t_{p_T(\mu_f=cte)}$ de roulage estimés par notre modèle (résolution cinétique) à coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu=cte$. Nous poserons $\mu_f=cte=\mu_f(k_\mu V_{TD})$ au freinage et $\mu_r=cte=\mu_r(k_\mu V_R)$ au décollage, et nous chercherons quelle proportion de vitesse k_μ est-il judicieux de considérer.

Comme critère de comparaison, nous choisirons l'erreur relative définie comme suit :

Erreur relative sur la longueur de piste au roulage

$$Er_{\%}(L_{p_{T}}) = 100 \; \frac{L_{p_{T}(\mu(V))} - L_{p_{T}(\mu = cte)}}{L_{p_{T}(\mu(V))}} \label{eq:er_er_er_er_er_er_er_er}$$

Erreur relative sur le temps de piste au roulage

$$Er_{\%}(t_{p_{r}}) = 100 \frac{t_{p_{r}(\mu(V))} - t_{p_{r}(\mu=cte)}}{t_{p_{r}(\mu(V))}}$$

6.6.1 Décollage : roulage en roue libre

Prenons le cas d'un B747 au décollage, entre la vitesse initiale nulle et la vitesse de rotation V_R . Traçons l'erreur relative entre longueur de roulage réelle ou temps de roulage réel (avec $\mu_r(V)$) et longueur de piste modélisée ou temps de roulage modélisé (avec $\mu_r = cte = \mu_r(k_\mu V_R)$), (Figure 6.7, p. 142), en fonction de la proportion de vitesse k_μ considérée.

En roue libre, le coefficient de frottement pneu/piste μ_r croît lorsque la vitesse croît (Appendix A.5, p. 272), c'est-à-dire que la résistance au roulement se fait de plus en plus forte à mesure que l'avion prend de la vitesse. Par conséquent, considérer le coefficient de frottement statique $\mu_r(V=0)$ dans notre modèle à $\mu_r=cte$, n'est pas judicieux car trop optimiste vis-à-vis de la résistance au roulement réelle que subit l'avion : les longueurs et temps de roulage ainsi estimés seraient trop faibles. C'est ce qui est traduit (Figure 6.7, p. 142), à $k_\mu=0$, par le fait que l'erreur relative soit positive (longueur et temps de roulage sous-estimés).

A contrario, considérer un coefficient de frottement pneu/piste trop élevé (k_{μ} trop grand), entraînerait une sur-estimation de la longueur et du temps de roulage.

Il est donc naturel que l'erreur relative soit une fonction décroissante de k_{μ} .

Au décollage, la valeur de k_{μ} optimale, c'est-à-dire celle qui annule l'erreur relative, ne varie quasiment pas selon la nature et l'état de la piste (piste propre et sèche, piste mouillée, piste enneigée), c'est-à-dire selon la valeur du coefficient de frottement statique pneu/piste μ_r .

Par contre, la valeur optimale de k_{μ} pour la longueur de roulage $k_{\mu} \approx 0.684$ est plus importante que celle pour le temps de roulage $k_{\mu} \approx 0.561$. Il faudra donc choisir ce que l'on cherche à bien estimer : le temps ou la longueur au roulage?

Notons tout de même que l'erreur d'estimation du modèle à $\mu_r = cte$ est au pire de 2%, ce qui reste très raisonnable! De plus, considérer la valeur optimale de longueur de roulage $k_{\mu} \approx 0.684$ induit une erreur d'estimation du temps de roulage de moins de 0.5% ce qui suffit amplement pour une approche de type avant-projet.

6.6.2 Atterrissage: freinage

Étudions le cas d'un A300 au freinage entre la vitesse de toucher des roues V_{TD} et l'arrêt complet de l'avion.

Le cas de l'atterrissage est beaucoup plus préoccupant car l'erreur d'estimation (Figure 6.7, p. 142) peut être colossale si la valeur moyenne constante du coefficient de frottement pneu/piste μ_f est mal choisie : près de 45% d'erreur sur piste enneigée si l'on choisit $\mu_f = \mu_f(V=0)$!

C'est assez logique car au freinage, la poussée étant réduite, le terme de frottement créé par le freinage du train est prépondérant, et ce terme est directement lié au coefficient μ_f . Par conséquent, choisir une mauvaise valeur moyenne du coefficient de frottement pneu/piste μ_f entraîne une mauvaise estimation de la longueur ou du temps de freinage.

Nous avons vu (Appendix A.5, p. 272), que le coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f décroît lorsque la vitesse croît. Autrement dit, que la capacité de freinage (c'est-à-dire μ_f) croît au fur et à mesure que la vitesse de l'avion diminue. C'est la raison pour laquelle, la longueur et le temps de roulage sont sous-estimés pour k_μ proche de 0, et au contraire sur-estimés pour les valeurs élevées de k_μ .

Comme pour le décollage, le coefficient k_{μ} optimal est plus élevé pour la longueur de freinage que pour le temps de freinage.

Par contre, k_{μ} varie beaucoup selon la nature et l'état de piste, c'est-à-dire selon la valeur du coefficient de frottement statique $\mu_f(V=0)$. Le coefficient k_{μ} est maximal pour les pistes propres et sèches ($\mu_f(V=0)$ entre 0.7 et 1) : $k_{\mu}\approx 0.67$ pour la longueur de freinage et $k_{\mu}=0.51$ pour le temps de freinage. Pour les pistes mouillées ($\mu_f(V=0)$ entre 0.5 et 0.7), k_{μ} est plus faible : $k_{\mu}\approx 0.65$ pour la longueur de freinage et $k_{\mu}=0.48$ pour le temps de freinage. Pour les pistes en herbe ($\mu_f(V=0)$ entre 0.3 et 0.5), k_{μ} est encore plus faible : $k_{\mu}\approx 0.6$ pour la longueur de freinage et $k_{\mu}=0.44$ pour le temps de freinage. Pour les pistes glacées ($\mu_f(V=0)$ inférieur à 0.3), k_{μ} est encore plus faible : $k_{\mu}\approx 0.52$ pour la longueur de freinage et $k_{\mu}=0.35$ pour le temps de freinage.

Le gradient du coefficient k_{μ} optimal en fonction de la nature de la piste $\mu_f(V=0)$, est d'autant plus grand que la piste est glissante : $\mu_f(V=0)$ faible. Plus la piste est glissante, plus l'imprecision sur la valeur moyenne du coefficient de frottement μ_f moyen, entraînera une grande erreur.

CE QU'IL FAUT RETENIR 6.1 Choisir une valeur unique de $k_{\mu}=0.68$, permet de bien estimer (Figure 6.7, p. 142), la longueur de freinage sur piste standard propre et sèche, en entraı̂nera au pire, une erreur de -12% dans les conditions extrême d'une piste glacée. Cette valeur a aussi l'avantage de convenir pour le décollage. C'est donc l'ordre de grandeur de $k_{\mu}=0.68$ que nous retiendrons pour l'étude de la longueur de roulage à l'aide d'un modèle à $\mu=cte$.

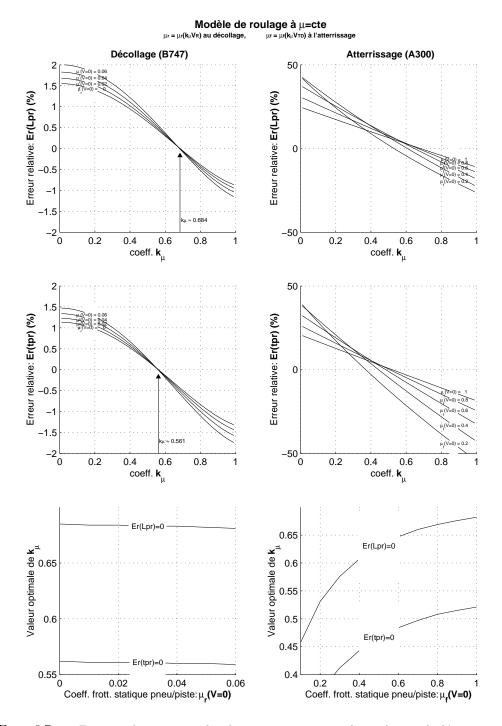


FIG. 6.7 – Erreur relative entre les longueurs et temps de roulage calculés avec un coefficient de frottement pneu/piste $\mu(V)$ fonction de la vitesse et ceux calculés avec notre modèle (résolution cinétique) avec $\mu=$ cte. $Er_{\%}(L_{p_r})=100\,\frac{L_{p_r(\mu(V))}-L_{p_r(\mu=cte)}}{L_{p_r(\mu(V))}}$ et $Er_{\%}(t_{p_r})=100\,\frac{t_{p_r(\mu(V))}-t_{p_r(\mu=cte)}}{t_{p_r(\mu(V))}}$. Calculs effectués pour différents états de piste, c'est-à-dire différentes valeurs du coefficient de frottement statique $\mu(V=0)$.

6.7 Résolution avec un modèle du coefficient de frottement pneu/piste fonction de la vitesse $\mu(V)$

Jusqu'à présent, nous avons proposé des résolutions analytiques du roulage pour une modélisation du coefficient de frottement pneu/piste μ constant. Or nous savons qu'en réalité, ce coefficient varie avec la vitesse de roulage de l'avion (Appendix A.5, p. 272). Nous venons de voir que le choix de la valeur moyenne de ce coefficient $\mu=cte$ devait être fait judicieusement, surtout à l'atterrissage : sur piste enneigée, l'erreur d'estimation peut atteindre près de 45% si l'on choisit comme valeur, le coefficient de frottement statique au freinage $\mu(V=0)$.

C'est pourquoi, nous proposons dans cette section d'améliorer nos modèles de roulage par une méthode permettant de tenir compte de la variation du coefficient de frottement pneu/piste avec la vitesse de roulage de l'avion $\mu = \mu(V)$.

La méthode consiste à assimiler l'accélération réelle $\Gamma_{\text{réelle}}$ de l'avion pour laquelle le coefficient de frottement pneu/piste varie avec la vitesse $\mu = \mu(V)$, à une accélération de la forme $\Gamma_{\text{recalée}} = A \, V^2 + B \, V + C$ (avec A, B, C constantes, ce que nos résolutions cinétique et temporelle permettent de résoudre).

Nous obtiendrons alors un modèle de roulage beaucoup plus précis que le modèle à $\mu=cte$, c'est-à-dire avec une précision inférieure à 0.5% sur la majorité des pistes, excepté sur les pistes enneigées où l'erreur reste tout de même inférieure à 2%.

Vous aurez au final le choix entre deux types de modèle : l'un à $\mu=cte$, très simple d'utilisation et suffisamment précis pour les pistes standards, et l'autre, tenant compte de la variation de μ avec la vitesse, beaucoup plus précis, plus robuste mais d'utilisation un peu plus sophistiquée.

6.7.1 Méthode de résolution pour un coefficient μ fonction de la vitesse

Jusqu'à présent, aucun modèle analytique de la longueur de piste n'a jamais été développé avec une modélisation du coefficient de frottement pneu/piste fonction de la vitesse $\mu(V)$. La principale raison est qu'une telle modélisation de μ complique fortement l'expression analytique de l'accélération de l'avion Γ , ce qui rend son intégration analytique $L_{p_r} = \int \frac{VdV}{\Gamma}$ impossible, même à l'aide de logiciel de calcul formel tel que MAPLE. Nous allons pourtant vous proposer dans ce paragraphe, une méthode analytique approchée pour déterminer la longueur de roulage L_{p_r} en tenant compte de la variation du coefficient de frottement pneu/piste μ avec la vitesse.

Cela consiste à assimiler l'accélération réelle $\Gamma_{\text{réelle}}$ pour laquelle μ est fonction de la vitesse V, à une parabole $\Gamma_{\text{recalée}} = AV^2 + BV + C$, puisque nous savons résoudre analytiquement par notre modèle de résolution cinétique une accélération parabolique. Les coefficients A, B, C sont choisis de manière à ce que les accélérations modélisée $\Gamma_{\text{recalée}}$ et réelle $\Gamma_{\text{réelle}}$ coïncident pour trois vitesses : la vitesse initiale de roulage V_i , la vitesse finale de roulage V_f , et une vitesse intermédiaire V_m judicieusement choisie.

$$\begin{split} &\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_i) = &\Gamma_{\text{recal\'ee}}(V_i) &= AV_i^2 + BV_i + C \\ &\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_m) = &\Gamma_{\text{r\'ecal\'ee}}(V_m) &= AV_m^2 + BV_m + C \\ &\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_f) = &\Gamma_{\text{r\'ecal\'ee}}(V_f) &= AV_f^2 + BV_f + C \end{split}$$

On en déduit les coefficients :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_i^2 & V_i & 1 \\ V_m^2 & V_m & 1 \\ V_f^2 & V_f & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_i) \\ \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_m) \\ \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_f) \end{pmatrix}$$

$$A = -\frac{\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_i)}{V_i V_f - V_m V_f - V_i^2 + V_i V_m} + \frac{\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_m)}{V_i V_f - V_m V_f - V_i V_m + V_m^2} + \frac{\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_f)}{V_i V_m - V_i V_f + V_f^2 - V_m V_f}$$

$$B = \frac{(V_f + V_m) \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_i)}{V_i V_f - V_m V_f - V_i^2 + V_i V_m} - \frac{(V_f + V_i) \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_m)}{V_i V_f - V_m V_f - V_i V_m + V_m^2} - \frac{(V_i + V_m) \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_f)}{V_i V_m - V_i V_f + V_f^2 - V_m V_f}$$

$$C = -\frac{V_m V_f \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_i)}{V_i V_f - V_m V_f - V_i^2 + V_i V_m} + \frac{V_i V_f \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_m)}{V_i V_f - V_m V_f - V_i V_m + V_m^2} + \frac{V_i V_m \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_f)}{V_i V_m - V_i V_f + V_f^2 - V_m V_f}$$

En pratique, les expressions des coefficients A, B, C sont plus simples car l'une des vitesses initiale ou finale de roulage, est souvent nulle.

Au décollage entre $V_i=0$ et $V_f=V_R$, en notant $V_m=k_\Gamma V_R$, leurs expressions reviennent à :

$$A = \frac{1}{V_R^2} \left(\frac{1}{k_\Gamma} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) - \frac{1}{k_\Gamma - 1} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_R) + \frac{1}{k_\Gamma(k_\Gamma - 1)} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(k_\Gamma V_R) \right)$$

$$B = \frac{1}{V_R} \left(-\frac{k_\Gamma + 1}{k_\Gamma} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) + \frac{k_\Gamma}{k_\Gamma - 1} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_R) - \frac{1}{k_\Gamma(k_\Gamma - 1)} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(k_\Gamma V_R) \right)$$

$$C = \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0)$$

À l'atterrissage, entre la vitesse initiale $V_i = V_{TD}$ et l'arrêt complet de l'avion $V_f = 0$, en notant $V_m = k_{\Gamma}V_{TD}$, leurs expressions reviennent à :

$$A = \frac{1}{V_{TD}^{2}} \left(\frac{1}{k_{\Gamma}} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) - \frac{1}{k_{\Gamma} - 1} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{TD}) + \frac{1}{k_{\Gamma}(k_{\Gamma} - 1)} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(k_{\Gamma} V_{TD}) \right)$$

$$B = \frac{1}{V_{TD}} \left(-\frac{k_{\Gamma} + 1}{k_{\Gamma}} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) + \frac{k_{\Gamma}}{k_{\Gamma} - 1} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{TD}) - \frac{1}{k_{\Gamma}(k_{\Gamma} - 1)} \Gamma_{\text{r\'eelle}}(k_{\Gamma} V_{TD}) \right)$$

$$C = \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0)$$

Les expressions analytiques des coefficients A,B,C ayant des formes similaires, afin de simplifier les notations, nous noterons V_{ref} la vitesse de référence (V_R au décollage, V_{TD} à l'atterrissage). Ceci simplifie le modèle d'accélération équivalente (pour une accélération entre 0 et V_{ref} ou une décélération entre V_{ref} et 0):

$$\begin{split} \Gamma_{\text{recal\'ee}} &= AV^2 + BV + C = a\left(\frac{V}{V_{ref}}\right)^2 + b\frac{V}{V_{ref}} + c \\ a &= \frac{1}{k_{\Gamma}}\Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) - \frac{1}{k_{\Gamma} - 1}\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{ref}) + \frac{1}{k_{\Gamma}(k_{\Gamma} - 1)}\Gamma_{\text{r\'eelle}}(k_{\Gamma}V_{ref}) \\ b &= -\frac{k_{\Gamma} + 1}{k_{\Gamma}}\Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) + \frac{k_{\Gamma}}{k_{\Gamma} - 1}\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{ref}) - \frac{1}{k_{\Gamma}(k_{\Gamma} - 1)}\Gamma_{\text{r\'eelle}}(k_{\Gamma}V_{ref}) \\ c &= \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) \end{split}$$

REMARQUE 6.10 Une tentative a été faite pour trouver un lien analytique entre ces coefficients A,B,C recalés et ceux $A_{\mu=cte},B_{\mu=cte},C_{\mu=cte}$ du modèle à valeur moyenne du coefficient de frottement pneu/piste $\mu=cte=\mu(k_{\mu}V_{ref})$. Malheureusement, cette tentative n'a pas abouti même en négligeant certains termes par rapport à d'autres. Ceci est probablement dû au fait que, pour des coefficients de frottement statique $\mu(V=0)$ faibles (Figure A.12, p. 274) (Appendix A.5, p. 272), le coefficient de frottement μ varie beaucoup avec la vitesse de l'avion V, c'est-à-dire le gradient $\frac{\partial \mu}{\partial V}$ est important.

6.7.2 Quelle valeur du coefficient de recalage k_{Γ} choisir?

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer la valeur du coefficient de recalage k_{Γ} qu'il faut considérer pour minimiser l'erreur entre la longueur de roulage réelle $L_{p_T(\mu(V))}$ (calculée par intégration numérique avec un coefficient de frottement pneu/piste fonction de la vitesse $\mu(V)$), et la longueur de roulage $L_{p_T(k_{\Gamma})}$ calculée à l'aide de notre méthode de recalage en accélération.

Erreur relative sur la longueur de piste au roulage

$$Er_{\%}(L_{p_r}) = 100 \frac{L_{p_r(\mu(V))} - L_{p_r(k_{\Gamma})}}{L_{p_r(\mu(V))}}$$

Erreur relative sur le temps de piste au roulage

$$Er_{\%}(t_{p_{r}}) = 100 \frac{t_{p_{r}(\mu(V))} - t_{p_{r}(k_{\Gamma})}}{t_{p_{r}(\mu(V))}}$$

Prenons le cas du roulage au décollage d'un B747 (Figure 6.8, p. 146), avec le modèle recalé $(k_p=2\ 10^{-4})$ d'A.Lausetti (Equation A.4, p. 273) du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre $\mu_r(V)$. Quels que soient la nature et l'état des pistes, la valeur du coefficient optimal de recalage k_Γ pour la longueur de roulage est de l'ordre de $k_\Gamma\approx 0.64$, et pour le temps de roulage est de l'ordre de $k_\Gamma\approx 0.55$. Cela dit, quelle que soit la valeur de recalage k_Γ choisie, l'erreur d'estimation est minime! L'erreur reste inférieure à 0.5% que ce soit pour l'estimation de la longueur ou du temps de roulage (Figure 6.8, p. 146). Ce modèle est bien meilleur que celui à $\mu=cte$ (Figure 6.7, p. 142).

Prenons maintenant le cas du freinage d'un A300 à l'atterrissage, avec le modèle d'A.Lausetti du modèle du coefficient de frottement pneu/piste $\mu_f(V)$ (Equation A.10, p. 287), avec notre modélisation de la vitesse W. Le coefficient de recalage k_{Γ} dépend cette fois-ci de la nature et de l'état de la piste, c'est-à-dire de la valeur du coefficient de frottement statique $\mu_f(V=0)$. Là encore, l'erreur du modèle recalé en accélération est bien meilleur (rapport de 10 sur l'erreur relative d'estimation) que celui à $\mu=cte$ (Figure 6.7, p. 142).

CE QU'IL FAUT RETENIR 6.2 Choisir une valeur unique de $k_{\Gamma}=0.64$, permet de bien estimer (Figure 6.8, p. 146), la longueur de freinage sur la majorité des pistes avec une erreur d'estimation inférieure à 0.5% et une erreur inférieure à 1.5% dans les conditions extrêmes d'une piste glacée. Cette valeur de $k_{\Gamma}=0.64$ a aussi l'avantage de convenir pour le décollage. Bien que cette valeur soit choisie pour estimer au mieux la longueur de roulage, elle convient également à l'estimation du temps de roulage dont l'erreur d'estimation reste inférieure à 1% sur la majorité des pistes et inférieure à 3% sur les pistes glacées.

C'est donc l'ordre de grandeur de $k_{\Gamma}=0.64$ que nous retiendrons pour l'étude de la longueur de roulage pour notre modèle recalé en accélération.

Pour cette valeur choisie du coefficient de recalage de $k_{\Gamma} = 0.64$, on a :

$$\Gamma_{\text{recal\'ee}} = a \left(\frac{V}{V_{ref}}\right)^2 + b \frac{V}{V_{ref}} + c$$

$$a = 1.56 \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) + 2.78 \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{ref}) - 4.34 \Gamma_{\text{r\'eelle}}(k_{\Gamma}V_{ref})$$

$$b = -2.56 \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) - 1.78 \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{ref}) + 4.34 \Gamma_{\text{r\'eelle}}(k_{\Gamma}V_{ref})$$

$$c = \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0)$$

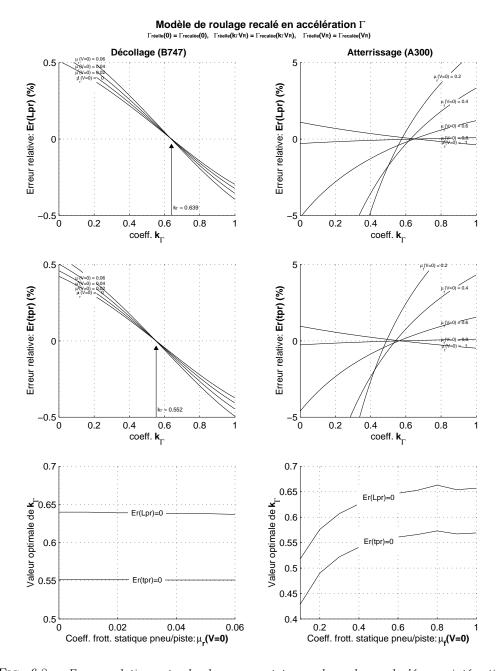


FIG. 6.8 – Erreur relative entre les longueurs et temps de roulage calculés par intégration numérique avec un coefficient de frottement pneu/piste $\mu(V)$ fonction de la vitesse, et ceux calculés avec notre modèle (recalé en accélération). $Er_{\%}(L_{p_r}) = 100 \frac{L_{p_r(\mu(V))} - L_{p_r(k_\Gamma)}}{L_{p_r(\mu(V))}}$ et $Er_{\%}(t_{p_r}) = 100 \frac{t_{p_r(\mu(V))} - t_{p_r(k_\Gamma)}}{t_{p_r(\mu(V))}}$. Calculs effectués pour différents états de piste, c'est-à-dire différentes valeurs du coefficient de frottement statique $\mu(V=0)$.

6.7.3 Robustesse du modèle recalé en accélération

Comparons nos différents modèles de roulage par rapport aux longueurs et temps de roulage calculés par intégration numérique avec un coefficient de frottement pneu/piste fonction de la vitesse $\mu(V)$. Considérons trois de nos modèles :

- Le modèle du roulage simpliste : résolution cinétique avec un coefficient de frottement constant égal au coefficient de frottement statique $\mu = cte = \mu(V=0)$. C'est le pire cas des modèles à $\mu = cte$.
- Le modèle du roulage simple : résolution cinétique avec un coefficient de frottement pneu/piste constant, égal à $\mu_r = cte = \mu_r(k_\mu V_R)$ (ou $\mu_f = cte = \mu_f(k_\mu V_{TD})$ à l'atterrissage), avec la valeur choisie de $k_\mu = 0.68$ (Section 6.6, p. 140).
- Le modèle du roulage recalé en accélération : résolution cinétique à partir d'une accélération avion modélisée sous la forme d'un polynôme d'ordre 2 en V qui concorde avec l'accélération réelle pour trois vitesses : en V=0, en $V=k_{\Gamma}V_R$ et en $V=V_R$ (respectivement en V=0, en $V=k_{\Gamma}V_{TD}$ et en $V=V_{TD}$ pour l'atterrissage), avec la valeur du coefficient de recalage choisie à $k_{\Gamma}=0.64$.

Nous observons (Figure 6.9, p. 148), qu'au décollage, quelles que soient les pistes, les estimations des modèles sont très bonnes : l'erreur relative d'estimation est très faible, même pour le modèle simpliste $\mu=cte=\mu(V=0)$ qui représente le pire cas avec seulement au maximum 2% d'erreur sur l'estimation de la longueur de roulage et 1.5% pour le temps de roulage. Utiliser le modèle de roulage simple à $\mu_r=cte=\mu_r(k_\mu V_R)$ ou le modèle du roulage recalé en accélération, permet un gain d'estimation de 1.5% par rapport à l'utilisation du modèle simpliste à $\mu=cte=\mu(V=0)$.

Pour l'atterrissage, le modèle simpliste $\mu=cte=\mu(V=0)$ donne des estimations très mauvaises (jusqu'à 45% d'erreur!). Les modèles simple $\mu=cte=\mu(k_{\mu}V_{TD})$ et recalé en accélération sont adaptés aux pistes standards propres et sèche. Sorti de ces pistes, le modèle recalé en accélération a un très bon comportement puisque ces estimations restent cohérentes avec une erreur inférieure à 1% sur la majorité des pistes et même inférieure à 3% dans les conditions extrêmes de pistes glacées. Ce modèle est très robuste vis-à-vis des différents natures et états de piste pour un même coefficient de recalage $k_{\Gamma}=0.64$. Par ailleurs, le temps de roulage est également bien estimé quelle que soit la piste.

À l'inverse, le modèle simple $\mu_f = cte = \mu_f(k_\mu V_{TD})$ qui a été choisi pour bien estimer le roulage sur pistes standards propres et sèches $(k_\mu = 0.68)$, voit ses estimations se dégrader pour les pistes plus glissantes (12% d'erreur sur la piste glacée). Le temps de roulage n'est par contre pas bien estimé, cela dit, le coefficient k_μ a été choisi pour estimer la longueur de roulage et non pas le temps de roulage. Ce modèle est moins robuste que le modèle recalé en accélération mais à l'avantage d'être plus simple.

Nous proposons donc deux types de modèles : un modèle à $\mu = cte = \mu(k_{\mu}Vref)$ simple avec une précision correcte surtout sur les pistes standards $(k_{\mu} = 0.68)$, un autre modèle recalé en accélération $(k_{\Gamma} = 0.64)$ plus sophistiqué mais beaucoup plus précis et plus robuste.

Modèle avec μ (V=0)

Modèle avec μ (kμVR)

Distance de roulage au décollage Distance de roulage à l'atterrissage Erreur relative: $\mathbf{Er}_{\%}$ = 100 (Lpr(réelle)–Lpr(modèle))/Lpr(réelle) μ (V=0)/(1+V/W) : 107(μ.(V=0))²-12.5μ.(V=0)+24.5 0.5

Erreur des modèles de roulage

-30 <u>|</u> 0.02 0.04 0.2 0.06 0.4 8.0 Coeff. de frott. statique pneu/piste en roue libre: $\mu_r(V=0)$ Coeff. de frott. statique pneu/piste au freinage: $\mu_r(V=0)$

Modèle avec μ (V=0)

Modèle avec μ_f (kμVTD)

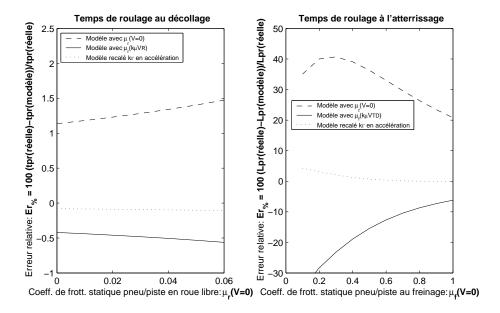


FIG. 6.9 – Erreur relative entre les lonqueurs et temps de roulage calculés par intégration $num\'erique~avec~un~coefficient~de~frottement~pneu/piste~\mu(V)~fonction~de~la~vitesse,~et~ceux$ calculés avec nos modèles, pour différents natures et états de piste (c'est-à-dire pour différentes valeur du coefficient de frottement statique pneu/piste $\mu(V=0)$. Nos modèles sont choisi de manière à estimer au mieux la longueur de roulage. Leur estimation du temps de roulage est $mis\ \grave{a}\ titre\ indicatif.$

148 $18\ {\rm d\acute{e}cembre}\ 2006$

6.7.4 Conclusion : Modèle recalé en accélération

Modèle du recalage de l'accélération avion pour la résolution de la longueur de roulage

tenant compte d'un coefficient de frottement pneu/piste fonction de la vitesse $\mu(V)$

Méthode:

– Calculer les coefficients a, b, c de la parabole représentant l'accélération équivalente de l'avion $\Gamma_{\text{recal\'ee}}$, à partir de valeurs de l'accélération réelle $\Gamma_{\text{r\'eelle}}$ utilisant un coefficient de frottement pneu/piste fonction de la vitesse.

$$\Gamma_{\text{r\'eelle}} \approx \Gamma_{\text{r\'ecal\'ee}} = a \left(\frac{V}{V_{ref}}\right)^2 + b \frac{V}{V_{ref}} + c$$

$$a = 1.56 \,\Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) + 2.78 \,\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{ref}) - 4.34 \,\Gamma_{\text{r\'eelle}}(0.64 \,V_{ref})$$

$$b = -2.56 \,\Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) - 1.78 \,\Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{ref}) + 4.34 \,\Gamma_{\text{r\'eelle}}(0.64 \,V_{ref})$$

$$c = \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0)$$

Avec $V_{ref} = V_R$ pour le décollage, $V_{ref} = V_{TD}$ pour l'atterrissage.

- Calculer la longueur de roulage L_{p_r} en appliquant le modèle de résolution cinétique (Table 6.3, p. 134) avec les coefficients constants $A=\frac{a}{V_{ref}^2},~B=\frac{b}{V_{ref}},~C=c.$
- Mode d'obtention : quasi-analytique. La seule approximation vient du fait que l'accélération réelle de l'avion (où le coefficient de frottement pneu/piste varie en fonction de la vitesse) est assimilée à une parabole qui coïncide avec l'accélération réelle en trois vitesses : la vitesse initiale de la phase de roulage étudiée, la vitesse finale, une vitesse intermédiaire judicieusement choisie (environ 64% de la vitesse maximale de la phase de roulage).
- **Domaine de définition :** Tout avion au roulage. Le domaine de définition sera restreint par celui du modèle du coefficient de frottement pneu/piste $\mu(V)$ que vous aurez choisi (Appendix A.5, p. 272).
- **Précision :** 0.015% au roulage en roue libre. Au freinage, inférieure à 1% sur les pistes propres et sèches, ou mouillées, ou en herbe et inférieure à 3% sur piste glacée.

Tab. 6.5 – Méthode de résolution du roulage avec un coefficient de frottement pneu/piste μ fonction de la vitesse

6.8 La rotation

La rotation est la phase particulière du roulage où l'avion passe de la vitesse de rotation V_R où sa roulette de nez quitte le sol, à la vitesse de décollage ou lift-off V_{LOF} où l'avion quitte complètement le sol. Durant cette phase, l'incidence de l'avion varie de l'incidence de roulage α_r à l'incidence de décollage α_{LOF} . L'évolution de l'incidence durant la rotation dépend de la dynamique de l'avion en tangage, de la manière dont le pilote tire le manche à la rotation, ... Avec l'hypothèse d'une vitesse angulaire en tangage de rotation constante $q = \dot{\theta} = cte$, l'incidence durant la rotation peut s'exprimer par $\alpha = q t + \alpha_r$.

Or, notre modèle de résolution cinétique (Table 6.3, p. 134) considère que l'incidence α est constante. Pour modéliser la longueur de piste parcourue durant la rotation $L_{p_r\circlearrowleft}$ et le temps de la rotation $t_{p_r\circlearrowleft}$, il faudrait reprendre la résolution de l'équation différentielle de Riccati (Equation 6.4, p. 120) avec une incidence fonction du temps, ce qui n'est malheureusement pas possible analytiquement.

C'est pourquoi, nous vous proposerons une adaptation à la rotation de notre modèle de résolution cinétique, en considérant une incidence constante, moyenne, judicieusement choisie. Nous exposerons également le modèle simple de la rotation, couramment utilisé, qui consiste à moyenner la vitesse durant la rotation. Pour un avion de type A300, nous comparerons ces modèles avec le résultat de l'intégration numérique de la rotation. Nous pourrons en déduire la valeur moyenne de l'incidence à considérer pour notre résolution cinétique adaptée à la rotation.

6.8.1 Modèle simple de la rotation

Un modèle simple consiste à considérer une vitesse moyenne durant la rotation $\frac{V_{LOF}+V_R}{2}$ et une vitesse de rotation en tangage constante $q=\dot{\theta}=cte$, ce qui permet d'obtenir une modélisation simple de la longueur de piste parcourue durant la rotation $L_{p_{r()}}$, et du temps de la rotation $t_{p_{r()}}$.

Longueur parcourue durant la rotation L_{p_r}

En considérant une vitesse moyenne $\frac{V_R+V_{LOF}}{2}$, la longueur de piste parcourue durant la rotation $L_{p_{r\circlearrowleft}}$ peut s'écrire en fonction du temps de la rotation $t_{p_{r\circlearrowleft}}$:

$$L_{p_{r\circlearrowleft}} = \frac{V_R + V_{LOF}}{2} \ t_{p_{r\circlearrowleft}}$$

Temps de la rotation $t_{p_{r(\)}}$

La pente γ étant pratiquement nulle durant toute la rotation, l'assiette de l'avion θ et l'incidence α sont égales : $\theta = \alpha + \underbrace{\gamma}_{\approx 0}$. En considérant la vitesse de tangage

 $q = \dot{\theta} = cte$ constante, et en supposant que l'avion atteigne en même temps la vitesse de décollage V_{LOF} et l'incidence de décollage α_{LOF} , le temps de rotation $t_{p_{T}(5)}$ peut

6.8 La rotation Sup Aéro-Onéra

s'exprimer simplement par :

$$\begin{array}{rcl} q & = & \displaystyle \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = cte \\ & \alpha & = & q\,t + \alpha_r & \text{car au d\'ebut de la rotation} & \alpha(t=0) = \alpha_r \\ & \text{or } \alpha(t=t_{p_{r\circlearrowleft}}) & = & q\,t_{p_{r\circlearrowleft}} + \alpha_r = \alpha_{LOF} \\ & \text{d'où } t_{p_{r\circlearrowleft}} & = & \displaystyle \frac{\alpha_{LOF} - \alpha_r}{q} \end{array}$$

Ce qui permet d'aboutir au modèle simple de la rotation (Table 6.6, p. 151).

C'est le modèle que propose E.Torenbeek [Tor86] en précisant que les vitesses de tangage habituelles sont de l'ordre de 3 à 4°/s pour les gros avions de transport du type DC8, B707, B747, et plutôt de l'ordre de 4 à 5°/s pour les avions de transport plus petits tels que les F28, BAC 1-11. Pour l'A380 [Dan03], cette vitesse de tangage à la rotation est de l'ordre de 4.4°/s. E.Torenbeek précise également que le temps de rotation $t_{p_{T\circlearrowleft}}$ est de l'ordre de 2 à 4 secondes.

Modèle simple de la rotation

$$\begin{array}{lcl} t_{p_{r\circlearrowleft}} & = & \frac{\alpha_{LOF} - \alpha_r}{q} \\ \\ L_{p_{r\circlearrowleft}} & = & \frac{V_R + V_{LOF}}{2} \; \frac{\alpha_{LOF} - \alpha_r}{q} \end{array}$$

Mode d'obtention : Analytique, en supposant entre le début de la rotation à V_R et la fin à V_{LOF} , une vitesse de tangage q constante et une vitesse moyenne $\frac{V_R+V_{LOF}}{2}$. De plus, la vitesse de décollage V_{LOF} est supposée atteinte en même temps que l'incidence de décollage α_{LOF} .

Domaine de définition : Tout avion au roulage.

Précision: Par rapport à nos simulations numériques de 324 bimoteurs, l'erreur relative moyenne d'estimation est de 2.29% pour la longueur de piste parcourue durant la rotation sans panne moteur, et de 2.48% pour le temps de rotation correspondant. En cas de panne moteur, la longueur de rotation est estimée à 0.43% près et le temps de rotation à 0.56% près.

Variables:	
Symboles : Désignation	$\mathbf{Unit\acute{e}s}$
$L_{p_{T\circlearrowleft}}$: Distance parcourue par l'avion sur la piste durant la rotation, c'est-à-dire entre V_R où la roulette de nez quitte le sol, et	m
V_{LOF} où l'avion quitte entièrement la piste	
q : vitesse de rotation de tangage, supposée constante et connue, choisie	rad/s
V_{LOF} : Vitesse de décollage "lift-off" où l'avion quitte complètement la piste	m/s
V_R : Vitesse de rotation	m/s
$t_{p_{T}\circlearrowleft}$: Temps écoulé durant la rotation (en pratique, de l'ordre de 2 à 4 secondes)	$\overset{'}{s}$
α_r : Incidence de roulage	rad
α_{LOF} : Incidence de décollage qui s'exprime à l'aide de l'équation de sustentation par : $\alpha_{LOF}=\alpha_0+\frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SV_{LOF}{}^2Cz\alpha}$	rad

Tab. 6.6 – Modèle simple de la rotation (entre V_R et V_{LOF})

6.8.2 Extension de notre résolution cinétique à la rotation

Notre modèle de résolution cinétique (Table 6.3, p. 134) a été développé dans le cadre de l'hypothèse d'une incidence α constante. Or, durant la rotation, l'incidence de l'avion varie de l'incidence de roulage α_r à l'incidence de décollage α_{LOF} .

Analytiquement, nous n'avons pas pu résoudre l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) avec une incidence fonction du temps. Nous proposons donc d'utiliser une incidence moyenne α_{moy} , constante⁵, durant la rotation, ce qui permet d'appliquer notre résolution cinétique.

Considérer l'incidence moyenne comme égale à l'incidence de roulage $\alpha_{moy}=\alpha_r$ ou bien à l'incidence de décollage $\alpha_{moy}=\alpha_{LOF}$, nous permet de déterminer le minimum et le maximum de l'erreur d'estimation qu'une telle modélisation peut entraı̂ner. Nous cherchons (Figure 6.10, p. 152) quelle est la proportion k optimale pour considérer l'incidence moyenne :

$$\alpha_{moy} = k \, \alpha_{LOF} + (1 - k) \, \alpha_r$$

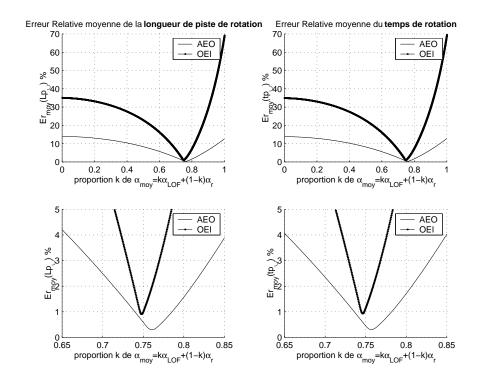


Fig. 6.10 – Valeur de l'incidence moyenne optimale à considérer pour le calcul de la phase de rotation. Ces erreurs sont les erreurs relatives moyennes de l'ensemble de nos simulations numériques de 324 bimoteurs. L'incidence moyenne optimale est celle qui correspond à une erreur moyenne nulle. Les deux figures d'en bas sont des "zoom" autour de la valeur optimale des deux figures d'en haut.

⁵Une autre méthode envisageable serait d'assimiler l'accélération réelle de l'avion lors de la rotation, pour laquelle l'incidence varie, à une accélération parabolique que notre résolution cinétique permet de résoudre analytiquement. C'est la méthode que nous avons employée lors de la résolution du roulage avec un coefficient de frottement pneu/piste fonction de la vitesse.

6.8 La rotation Sup Aéro-Onéra

	AEO	OEI
Pour calculer $L_{p_{r(5)}}$		k = 0.748
Pour calculer $t_{p_{r(\check{)}}}$	k = 0.757	k = 0.746

Remarque 6.11 En raison du caractère dynamique de cette phase de décollage, l'incidence α_{LOF} atteinte lorsque l'avion quitte complètement le sol à V_{LOF} , n'est pas tout à fait égale à l'incidence d'équilibre $\alpha_0 + \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SV_{LOF}^2Cz\alpha}$ correspondant à V_{LOF} . Ceci vient du fait qu'en ce point, la dérivée temporelle de la pente dans l'équation de sustentation n'est pas nulle : $-mg\dot{\gamma} = mg - \frac{1}{2}\rho\ V_a^2SCz$. Afin de conserver un modèle complètement analytique, nous considérons tout de même que $\alpha_{LOF} = \alpha_0 + \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SV_{LOF}^2Cz\alpha}$.

Considérer la vraie valeur de α_{LOF} ne fait que changer la valeur de k optimal à considérer pour le calcul de l'incidence moyenne (Figure 6.11, p. 153), sans pour autant rendre la précision de ce modèle de rotation plus robuste à une variation de la valeur de k considérée. Par ailleurs, cela nécessiterait également que nous développions un modèle identifié de α_{LOF} , ce qui n'en valait donc pas la peine.

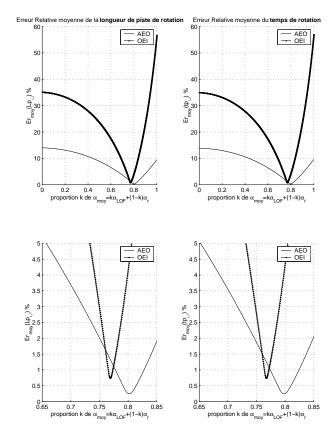


Fig. 6.11 – Valeur de l'incidence moyenne optimale si l'on considère la valeur réelle de l'incidence de décollage α_{LOF} et non pas l'incidence d'équilibre $\alpha_0 + \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SV_{LOF}^2Cz\alpha}$.

Modèle de la rotation par extension de la résolution cinétique : longueur parcourue $L_{p_{r\circlearrowleft}}$ et temps écoulé $t_{p_{r\circlearrowleft}}$ durant la rotation, pour une accélération avion de la forme

$$\Gamma = AV^2 + BV + C = A\left(V - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$$

$$L_{p_{r\circlearrowleft}} = \frac{1}{2A} \ln \left(\frac{\Gamma(V_{LOF})}{\Gamma(V_R)} \right) + V_{\Gamma_{min}} t_{p_{r\circlearrowleft}}$$

Au décollage et à l'atterrissage : $(\Delta > 0)$

$$t_{p_{r\circlearrowleft}} \ = \ \frac{1}{A\left(V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}\right)} \ \ln\left(\frac{\overline{V_{LOF}}^{\oplus} - 1}{\overline{V_{LOF}}^{\ominus} - 1} \, \frac{\overline{V_R}^{\ominus} - 1}{\overline{V_R}^{\ominus} - 1}\right)$$

Au décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) : $(\Delta < 0)$

$$t_{p_{r\circlearrowleft}} = \frac{signe(A)}{\sqrt{A\Gamma_{min}}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{V_{LOF} - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_{R} - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) \right)$$

$$\Delta = B^2 - 4AC \qquad \qquad \overline{V}^{\oplus} = \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\oplus}} \quad \text{et } \overline{V}^{\ominus} = \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\ominus}}$$

$$V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad \qquad V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}$$

$$V_{\Gamma=0}^{\ominus} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad \qquad \Gamma_{min} = -\frac{\Delta}{4A}$$

$$A = q_{2} \widetilde{F} - \widetilde{T}$$

$$B = q_{1} \widetilde{F}$$

$$C = \widetilde{F} - \widetilde{f_{r}}$$

$$Cz = Cz_{\alpha} (\alpha_{moy} - \alpha_{0}) + \Delta Cz_{oSP}$$

$$\widetilde{F} = \frac{F_{0}}{m} \frac{\rho}{\rho_{0}} (\cos \alpha_{moy} + \mu \sin \alpha_{moy})$$

$$\widetilde{T} = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} (Cx - \mu Cz)$$

$$\widetilde{f_{r}} = (\sin \gamma_{p} + \mu \cos \gamma_{p}) g$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + \Delta Cx_{oSP} + k_i Cz^2$$

Mode d'obtention : Analytique par intégration cinétique de l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) : $L_{p_{r\circlearrowleft}} = \int_{V_R}^{V_{LOF}} \frac{VdV}{\Gamma}$ et $t_{p_{r\circlearrowleft}} = \int_{V_R}^{V_{LOF}} \frac{dV}{\Gamma}$.

Domaine de définition : Tout avion au roulage.

Précision : Ce modèle a été obtenu par une résolution analytique exacte, dans le cadre des hypothèses d'une poussée moteur modélisée par $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2\right)$ et dirigée selon l'axe du fuselage, une incidence constante $\alpha = \alpha_{moy} = cte = k \left(\alpha_0 + \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SV_{LOF}^2Cz\alpha}\right) + (1-k)\alpha_r$, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et une pente de la piste $\gamma_p = cte$ supposée constante sur toute la portion de roulage étudiée. En pratique l'incidence de l'avion varie durant la rotation. Une erreur sur la valeur de k optimale (k=0.76 en décollage sans panne AEO et k=0.75 en décollage avec panne OEI) à considérer pour le calcul de l'incidence moyenne α_{moy} peut engendrer des erreurs conséquentes (Figure 6.10, p. 152), c'est pourquoi nous conseillons le premier modèle de la rotation (Table 6.6, p. 151) qui a en plus l'avantage d'être de mise en œuvre plus aisée.

TAB. 6.7 – Extension du modèle de Résolution cinétique à la rotation entre V_R et V_{LOF}

6.8 La rotation Sup Aéro-Onéra

Symboles: Désignation A, B, C : Coefficients du polynôme représentant l'accélération au (Equation 6.4, p. 120) dont le sens physique et do signes ont été discutés précédemment (Table 6.1, p. Le coefficient A est le paramètre d'ouverture de la par représentant l'accélération Γ en fonction de la vitesse Γ gure Γ gure Γ en fonction de la vitesse Γ vers le haut (et inversement pour Γ en fonction de la vitesse Γ vers le haut (et inversement pour Γ en fonction de la vitesse Γ vers le haut (et inversement pour Γ en fonction de la vitesse Γ vers le haut (et inversement pour Γ en fonction de la vitesse Γ la value Γ en fonction de la vitesse Γ la verse le bas). Le coefficient Γ représente la value Γ la value	nt les 121). rabole V (Fi- uverte ele est eur de
cient $C > 0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif C b : Envergure de la voilure c'est-à-dire la distance ent extrémités des ailes	
Cx: Coefficient de traînée de l'avion au roulage.	
Cz: Coefficient de portance de l'avion au roulage.	. 1
Cz_{α} : Gradient de coefficient de portance avec l'incidence Cx_{o} : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attent dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.	rad^{-1} ion, il
F_0 : Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des N_r	
teurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il f multiplier par $\frac{N_m-1}{m}$.	aut la
\widetilde{F} : Poussée réduite (Équation 6.6, p. 121)	m/s^2
\widetilde{f}_r : Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121)	m/s^2
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
k_i : Coefficient de traînée induite $k_i = \frac{1}{\pi \lambda}$	
$L_{p_{T\circlearrowleft}}$: Distance parcourue par l'avion sur la piste durant la rot c'est-à-dire entre V_R où la roulette de nez quitte le s V_{LOF} où l'avion quitte entièrement la piste	
m: Masse de l'avion	ka
q_1,q_2 : Coefficients du modèle de poussée (Equation 6.3, p. 1 S : Surface voilure	19) $(m/s)^{-1} \stackrel{kg}{\text{et}} (m/s)^{-2}$ m^2
$t_{p_{T\circlearrowleft}}$: Temps écoulé durant la rotation (en pratique, de l'ordr à 4 secondes)	
\widetilde{T} : Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)	m^{-1}
V_{LOF} : Vitesse de décollage (lift-off), c'est-à-dire vitesse à la l'avion quitte complètement la piste (Table 5.5, p. 16 (Table 5.6, p. 106)	
V_R : Vitesse de rotation, c'est-à-dire vitesse à laquelle la rode nez quitte le sol (Table 5.3, p. 102).	pulette m/s
$V^{\oplus}_{\Gamma=0}, V^{\ominus}_{\Gamma=0}$: Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-d tesses pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$	pour
$\begin{array}{c} \Delta>0: V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} \text{ et } V_{\Gamma=0}^{\ominus}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}.\\ V_{\Gamma_{min}}: \text{Vitesse pour laquelle l'accélération } \Gamma=\Gamma_{min} \text{ est minin}\\ A>0 \text{ ou maximale si } A<0. \ V_{\Gamma_{min}}=-\frac{B}{2A}. \end{array}$	nale si m/s

Symboles : Désignation	Unités
α_{moy} : Incidence moyenne à considérer dans notre modèle pour la rota-	rad
tion: $\alpha_{moy} = 0.61\alpha_{LOF} + (1 - 0.61)\alpha_r$ α_{LOF} : Incidence de l'avion au décollage $\alpha_{LOF} = \alpha_0 + \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SV_{LOF}^2Cz\alpha}$	rad
	rad
α_r : Incidence de l'avion au roulage avec toutes les roues au sol (Figure 6.3, p. 118)	raa
α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de	rad
la configuration Bec/Volet adoptée.	
Δ : Discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$. Généralement positif pour le	
décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un	
décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1,	
p. 245).	
ΔCx_o : Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train	
d'atterrissage ΔCx_{oTrain} , au moteur en panne $\Delta Cx_{omoulinet}$, à la sortie des spoilers ΔCx_{oSP}	
ΔCz_{oSP} : Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers	
Γ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la	m/s^2
piste, modélisée par : $\Gamma = AV^2 + BV + C$ avec A, B, C constants	, 0
(Equation 6.4, p. 120).	
Γ_{min} : Accélération minimale si $A>0$ ou maximale si $A<0.$ $\Gamma_{min}=$	m/s^2
$\frac{-\Delta}{4A}$	
γ_p : Pente de la piste, supposée constante	rad
λ : Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$	
μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues	
libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273).	
ho: Masse volumique de l'air au niveau de la piste	kg/m^3
ρ_0 : Masse volumique au niveau de la mer : $\rho_0 = 1.225 kg/m^3$	kg/m^3

6.9 Roulage avec du vent longitudinal constant $V_w = cte$

Dans cette section, nous allons élaborer un modèle analytique du roulage avec du vent longitudinal constant.

Vitesse du vent : $\overrightarrow{V_w} = V_w \overrightarrow{x}_p$ avec $V_w = cte$ (et pas de tourbillon : $\Omega_w = 0$)

Nous adopterons les notations suivantes :

Vitesse en G de l'avion par rapport à l'air : V_a Vitesse en G de l'avion par rapport à la terre : V_k Vitesse en G de l'air par rapport à la terre (vitesse du vent) : V_w

Nous avons jusqu'à présent développé des modèles sans vent ($V_w = 0$ pour les résolutions cinétiques et temporelles), mais en pratique, il y a toujours un peu de vent. C'est pourquoi, nous allons reprendre ces résolutions cinétique et temporelle, afin de les compléter, pour tenir compte du vent longitudinal.

6.9.1 Expression analytique de l'accélération avion

Nous avons vu (Equation 6.2, p. 119) que l'accélération avion s'exprime, grâce au principe fondamental de la dynamique, par la somme des forces (d'aérodynamique, de propulsion et de masse), divisée par la masse de l'avion.

Les efforts aérodynamiques de portance et de traînée, s'expriment en fonction de la vitesse de l'avion par rapport à l'air V_a .

Le terme d'aérodynamique s'écrit en fonction de la vitesse aérodynamique V_a :

$$\frac{1}{2}\rho \frac{S}{m}V_a^2 \left(Cx - \mu Cz\right)$$

Le terme de propulsion est également fonction de la vitesse aérodynamique V_a :

$$F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V_a + q_2 V_a^2 \right)$$

Quant au terme massique, il reste inchangé:

$$-mg\left(\sin\gamma_p + \mu\cos\gamma_p\right)$$

L'accélération de l'avion par rapport à la piste, selon l'axe de la piste, s'exprime donc par :

$$\Gamma = \frac{dV_k}{dt} = \frac{dV_a}{dt} + \underbrace{\frac{dV_w}{dt}}_{=0 \text{ car } V_w = cte} = AV_a^2 + BV_a + C$$

$$\Gamma = \frac{dV_a}{dt} = AV_a^2 + BV_a + C$$

L'accélération de l'avion est donc une équation différentielle de Riccati, fonction de la vitesse aérodynamique V_a , tout comme cela était le cas sans vent.

Le vent longitudinal $V_w=cte$ n'agit pas sur la forme analytique de l'accélération, mais dans la manière dont celle-ci est intégrée pour calculer la distance de roulage dans le repère de la piste ΔX_k . Il faudra traduire les conditions aux limites de vitesse, en vitesse air. Les vitesses au décollage $(V_1,V_{S1},V_R,V_{LOF},\dots)$ étant des vitesses air, l'application sera directe, mais il faudra par contre traduire la condition de l'avion à l'arrêt $(V_k=0)$ en vitesse air $V_a=0-V_w$.

6.9.2 Adaptation de la résolution cinétique

La résolution cinétique a permis d'obtenir la distance de roulage ΔX et le temps Δt de la portion de roulage étudiée, par intégration selon la vitesse V de l'accélération de l'avion Γ .

Reprenons cette intégration en tenant compte du vent longitudinal constant :

$$\begin{array}{rcl} V_k &=& V_a + V_w \\ dV_k &=& dV_a + \underbrace{dV_w}_{=0} = dV_a \\ \end{array}$$
 et par définition :
$$\Gamma &=& \frac{dV_k}{dt} \\ \text{alors} : \Delta t &=& \int_{t_f}^{t_i} dt = \int_{V_{k,i}}^{V_{k,f}} \frac{dV_k}{\Gamma} = \int_{V_{a,i}}^{V_{a,f}} \frac{dV_a}{\Gamma} \\ &=& \int_{V_{a,i} = V_{k,i} - V_w}^{V_{a,f}} \frac{dV_a}{AV_a^2 + BV_a + C} \end{array}$$

Nous retrouvons alors la même intégration que sans vent, donc la même formulation analytique trouvée par la résolution cinétique (Table 6.3, p. 134), à l'exception près qu'il faut faire attention aux bornes d'intégration qui doivent s'exprimer en vitesses aérodynamiques (vitesse initiale $V_{a,i}$ et vitesse finale $V_{a,f}$).

Par exemple, pour un décollage sans panne moteur (AEO All Engines Operating), le roulage se fait entre la vitesse aérodynamique initiale $V_{a,i} = \underbrace{V_{k,i}}_{=0 \text{ (à l'arrêt)}} -V_w = 0 - V_w$

et la vitesse finale $V_{a,f} = V_R$, ce qui permet d'écrire :

$$t_{p_{rAEO}} = \int_{0-V_w}^{V_R} \frac{dV_a}{\Gamma} = \int_{0-V_w}^{0} \frac{dV_a}{\Gamma} + \int_{0}^{V_R} \frac{dV_a}{\Gamma}$$

$$= \int_{0}^{V_R} \frac{dV_a}{\Gamma} - \int_{0}^{-V_w} \frac{dV_a}{\Gamma}$$
temps to the missing vent, gain determs grâce and

Remarque 6.12 Si l'avion a le vent de face alors $V_w < 0$ puisque $\overrightarrow{V_w} = V_w \overrightarrow{x}_p$ et le vecteur lié à la piste \overrightarrow{x}_p a été choisi dans le sens de décollage/atterrissage de l'avion. Par conséquent, $-V_w > 0$ et le résultat de l'intégrale $-\int_0^{-V_w} \frac{dV_a}{\Gamma}$ est bien négatif. Le vent de face permet effectivement de diminuer le temps et la distance de roulage. A contrario, un vent de dos sera pénalisant puisque $V_w > 0$ et donc le résultat de l'intégrale $\int_{-V_w}^0 \frac{dV_a}{\Gamma}$ est positif.

Ou encore avec l'exemple du décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative), en notant Γ_{N_m-1} l'accélération de l'avion avec un moteur en panne, le temps de roulage entre la vitesse initiale $V_{a,i} = \underbrace{V_{k,i}}_{=0 \text{ (à l'arrêt)}} -V_w = 0 - V_w$ et la vitesse finale $V_{a,f} = V_R$,

s'écrit :

$$\begin{array}{lll} t_{p_{rOEI}} & = & \displaystyle \int_{0-V_w}^{V_{EF}} \frac{dV_a}{\Gamma} + \int_{V_{EF}}^{V_R} \frac{dV_a}{\Gamma_{N_m-1}} \\ & = & \underbrace{\int_{0}^{V_{EF}} \frac{dV_a}{\Gamma} + \int_{V_{EF}}^{V_R} \frac{dV_a}{\Gamma_{N_m-1}}}_{\text{temps } t_{p_{rOEI}} \text{ mis sans vent}} - \underbrace{\int_{0}^{-V_w} \frac{dV_a}{\Gamma}}_{\text{gain de temps grâce au vent}} \end{array}$$

Pour le calcul de la distance de roulage, le principe est le même :

$$\begin{array}{rcl} V_k & = & \frac{dX_k}{dt} & \text{, par definition} \\ \Delta X_k & = & \int_{X_{k,i}}^{X_{k,f}} dX_k = \int_{t_i}^{t_f} V_k dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(V_a + V_w\right) dt \\ & = & \int_{V_{a,i}}^{V_{a,f}} V_a \frac{dV_a}{\Gamma} + V_w \Delta t \\ & = & \frac{1}{2\,A} \ln \left(\frac{\Gamma_f}{\Gamma_i}\right) + V_{\Gamma_{min}} \Delta t + V_w \Delta t \end{array}$$

Là encore, il faut faire attention aux conditions aux limites exprimées en vitesse aérodynamique V_a qui sont implicitement comprises dans l'expression de l'accélération initiale $\Gamma_i = AV_{a,i}^2 + BV_{a,i} + C$ et finale $\Gamma_f = AV_{a,f}^2 + BV_{a,f} + C$.

Par exemple, pour un décollage (AEO All Éngines Operating), le roulage se fait entre la vitesse aérodynamique initiale $V_{a,i} = V_{k,i} - V_w = 0 - V_w$ qui représente l'avion à l'arrêt en début de piste, et la vitesse aérodynamique finale $V_{a,f} = V_R$ qui est la vitesse de rotation :

$$L_{p_{rAEO}} = \int_{0-V_{w}}^{V_{R}} V_{a} \frac{dV_{a}}{\Gamma} = \frac{1}{2 A} \ln \left(\frac{AV_{R}^{2} + BV_{R} + C}{A(-V_{w})^{2} + B(-V_{w}) + C} \right) + V_{\Gamma_{min}} \Delta t + V_{w} \Delta t$$

La distance de roulage et le temps de roulage d'une portion de piste peuvent donc facilement s'exprimer par la résolution cinétique dans le cas d'un vent longitudinal constant $V_w = cte$, (Table 6.8, p. 161).

6.9.3 Adaptation de la résolution temporelle

La résolution temporelle consiste à résoudre l'équation différentielle de Riccati $\Gamma=\frac{dV_a}{dt}=AV_a^2+BV_a+C$, afin de trouver l'expression de la vitesse aérodynamique $V_a(t)$. Que ce soit avec ou sans vent, la résolution de cette équation différentielle est identique, seules les conditions initiales diffèrent.

Et la distance de roulage se calcule par :

$$\Delta X_k = \int_{t_i}^{t_f} V_k dt = \int_{t_i}^{t_f} (V_a + V_w) dt = \int_{t_i}^{t_f} V_a(t) dt + V_w \Delta t$$

Avec l'intégrale $\int_{t_i}^{t_f} V_a(t) dt$, qui a déjà été résolu
e dans notre résolution temporelle.

Les expressions de la vitesse aérodynamique $V_a(t)$ et de la distance $\Delta X_k(t)$ d'une portion de roulage, peuvent donc s'exprimer facilement par la résolution temporelle dans le cas d'un vent longitudinal constant $V_w = cte$, (Table 6.9, p. 162).

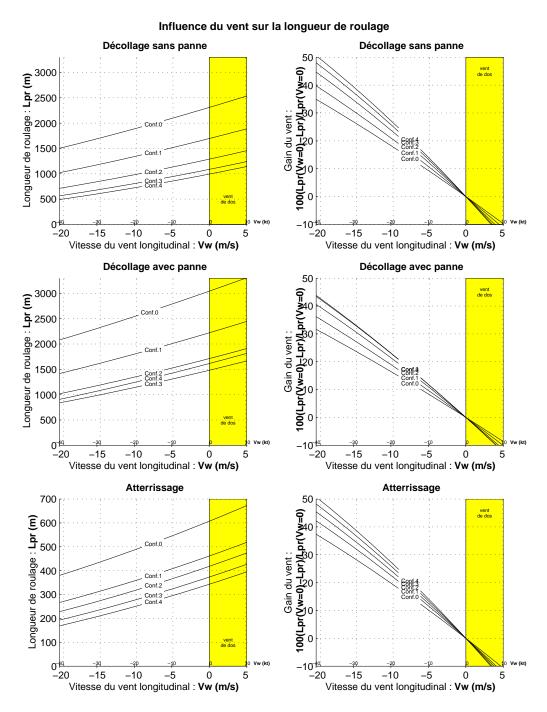


Fig. 6.12 – Calculs des longueurs de roulage de l'A300, pour toutes ses configurations de becs/volets, selon la vitesse de vent longitudinal V_w . Le gain de longueur de roulage avec un vent de 40 kt peut aller jusqu'à 50%!

Résolution cinétique avec vent longitudinal constant $V_w = cte$. Longueur de piste ΔX_k et temps Δt de roulage pour une accélération avion de la forme $\Gamma = AV_a^2 + BV_a + C = A\left(V_a - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$

$$\Delta X_k = \frac{1}{2 A} \ln \left(\frac{\Gamma_f}{\Gamma_i} \right) + V_{\Gamma_{min}} \Delta t + V_w \Delta t$$

Au décollage et à l'atterrissage : $(\Delta > 0)$

$$\Delta t = \frac{1}{A \left(V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus} \right)} \ln \left(\frac{\overline{V_{a,f}}^{\oplus} - 1}{\overline{V_{a,f}}^{\ominus} - 1} \frac{\overline{V_{a,i}}^{\ominus} - 1}{\overline{V_{a,i}}^{\oplus} - 1} \right)$$

Au décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) : $(\Delta < 0)$

$$\Delta t = \frac{signe(A)}{\sqrt{A\Gamma_{min}}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{V_{a,f} - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_{a,i} - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) \right)$$

$$\begin{array}{lll} \Delta &= B^2 - 4AC & \overline{V_a}^{\oplus} &= \frac{V_a}{V_{\Gamma=0}^{\oplus}} & \text{et } \overline{V_a}^{\ominus} = \frac{V_a}{V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus} &= \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} & V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A} \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus} &= \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} & \Gamma_{min} = -\frac{\Delta}{4A} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} V_{a} & = & V_{k} - V_{w} \\ A & = q_{2} \ \widetilde{F} - \widetilde{T} & \widetilde{F} & = \frac{F_{0}}{m} \frac{\rho}{\rho_{0}} \left(\cos \alpha_{r} + \mu \sin \alpha_{r} \right) \\ B & = q_{1} \ \widetilde{F} & \widetilde{T} & = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \left(Cx - \mu Cz \right) \\ C & = \widetilde{F} - \widetilde{f_{r}} & \widetilde{f_{r}} & = \left(\sin \gamma_{p} + \mu \cos \gamma_{p} \right) g \\ Cz & = & Cz_{\alpha} \left(\alpha_{r} - \alpha_{0} \right) + \Delta Cz_{oSP} \\ Cx & = & Cx_{o} + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + \Delta Cx_{oSP} + k_{i} Cz^{2} \end{array}$$

Mode d'obtention : Analytique par intégration cinétique de l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) : $\Delta X_k = \int_{V_{a,i}}^{V_{a,f}} \frac{V_a dV_a}{\Gamma}$ et $\Delta t = \int_{V_{a,i}}^{V_{a,f}} \frac{dV_a}{\Gamma}$.

Domaine de définition : Tout avion au roulage. Il faut scinder le roulage en autant de portions qu'il y a de phase où l'avion change de mode de fonctionnement c'est-à-dire dès lors que l'avion sort des spoilers, freine ou a une panne moteur, Car à chacun de ces changements, la valeur des coefficients A, B, C est modifiée et nos formules ne sont valables que lorsque ces coefficients sont constants.

Précision : Ce modèle a été obtenu par une résolution analytique exacte, sans aucune approximation, dans le cadre des hypothèses d'une poussée moteur modélisée par $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V_a + q_2 V_a^2\right)$ et dirigée selon l'axe du fuselage, un vent longitudinal constant $V_w = cte$, une incidence au roulage constante $\alpha_r = cte$, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et une pente de la piste $\gamma_p = cte$ supposée constante sur toute la portion de roulage étudiée.

Tab. 6.8 – Résolution cinétique avec vent longitudinal constant $V_w = cte$

Résolution temporelle avec vent longitudinal constant $V_w = cte$. Vitesse aérodynamique V_a et longueur de piste ΔX_k au roulage pour une accélération avion de la forme

$$\Gamma = AV_a^2 + BV_a + C = A\left(V_a - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$$

Cas du décollage ou atterrissage

(discriminant $\Delta>0$ et vitesse aérodynamique initiale $V_{a,i}$ comprise entre les racines $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$ et $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$)

$$V_{a} = V_{\Gamma_{min}} + \frac{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{2} \operatorname{th} \left(-\sqrt{-A\Gamma_{min}} \Delta t + \operatorname{th}^{-1} \chi \right)$$

$$\Delta X_{k} = V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln \left| \operatorname{ch} \left(-\sqrt{-A\Gamma_{min}} \Delta t + \operatorname{th}^{-1} \chi \right) \sqrt{1 - \chi^{2}} \right| + V_{w} \Delta t$$

Cas du décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) ou atterrissage sur piste très glissante (discriminant $\Delta < 0$)

$$V_{a} = V_{\Gamma_{min}} + \sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}} \tan \left(\sqrt{A\Gamma_{min}} \Delta t + \tan^{-1} \chi \right)$$

$$\Delta X_{k} = V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln \left| \cos \left(\sqrt{A\Gamma_{min}} \Delta t + \tan^{-1} \chi \right) \sqrt{1 + \chi^{2}} \right| + V_{w} \Delta t$$

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Avec} & \chi = \sqrt{\left|\frac{A}{\Gamma_{min}}\right|} \left(V_{a,i} - V_{\Gamma_{min}}\right) & \operatorname{si} \; \Delta > 0, \, \operatorname{on} \; \operatorname{a} \; \operatorname{aussi} \; \chi = 2 \frac{V_{a,i} - V_{\Gamma_{min}}}{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \\ & \Delta & = B^2 - 4AC \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus} & = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} & V_{\Gamma_{min}} & = -\frac{B}{2A} \\ V_{\Gamma=0}^{\ominus} & = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} & V_{\Gamma_{min}} & = -\frac{A}{2A} \\ & V_{\Gamma=0}^{\oplus} & = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} & \Gamma_{min} & = -\frac{\Delta}{4A} \\ & A & = q_2 \; \tilde{F} - \tilde{T} & \tilde{F} & = \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r\right) \\ & B & = q_1 \; \tilde{F} & \tilde{T} & = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \left(Cx - \mu Cz\right) \\ & C & = \tilde{F} - \tilde{f}_r & \tilde{f}_r & = \left(\sin \gamma_p + \mu \cos \gamma_p\right) g \\ & Cz & = Cz\alpha \left(\alpha_r - \alpha_0\right) + \Delta Cz_{oSP} \\ & Cz & = Cz\alpha \left(\alpha_r - \alpha_0\right) + \Delta Cz_{oSP} \\ & Cz & = Cz\alpha + \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = Cz\alpha + \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = Cz\alpha + \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = Cz\alpha + \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha & = -\frac{A}{2} \Delta Cz & = -\frac{A}{2} \Delta Cz \\ & Cz\alpha &$$

Mode d'obtention: Analytique par résolution temporelle de l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) (Appendix A.2, p. 255).

Domaine de définition : Tout avion au roulage. Scindez le roulage en autant de portions qu'il y a de phase où l'avion change de mode de fonctionnement c'est-à-dire dès lors que l'avion sort les spoilers, freine ou a une panne moteur, ... Car à chacun de ces changements, la valeur des coefficients A,B,C est modifiée et nos formules ne sont valables que lorsque ces coefficients sont constants.

Précision : Ce modèle a été obtenu par une résolution analytique exacte, sans aucune approximation, dans le cadre des hypothèses d'une poussée moteur modélisée par $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V_a + q_2 V_a^2\right)$ et dirigée selon l'axe du fuselage, d'un vent longitudinal constant $V_w = cte$, d'une incidence au roulage constante $\alpha_r = cte$, d'un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et d'une pente de la piste $\gamma_p = cte$ supposée constante sur toute la portion de roulage étudiée.

Tab. 6.9 – Résolution temporelle avec vent longitudinal constant $V_w = cte$

Symboles : Désignation $A,B,C: \text{Coefficients du polynôme représentant l'accélération avion }\Gamma$ (Equation 6.4, p. 120) dont le sens physique et dont les signes ont été discutés précédemment (Table 6.1, p. 121). Le coefficient A est le paramètre d'ouverture de la parabole représentant l'accélération Γ en fonction de la vitesse V (Figure A.1, p. 246). Si $A>0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (et inversement pour $A<0$, la parabole est ouverte vers le bas). Le coefficient C représente la valeur de l'accélération statique $C=\Gamma(V=0)$. Au décollage, le coefficient $C>0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C<0$.	Unités m^{-1} , s^{-1} et m/s^2
b : Envergure de la voilure c'est-à-dire la distance entre les extrémités des ailes	m
Cx: Coefficient de traînée de l'avion au roulage.	
Cz: Coefficient de portance de l'avion au roulage.	rad^{-1}
Cz_{α} : Gradient de coefficient de portance avec l'incidence Cx_{α} : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il	raa
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
dépend de la configuration Bec/Volet adoptée. F_0 : Poussée au point fixe (altitude et vitesse aérodynamique nulles)	N
des N_m moteurs. Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier par $\frac{N_m-1}{N_m}$.	14
\widetilde{F} : Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121)	m/s^2
\widetilde{f}_r : Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121)	m/s^2
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 m/s^2$	m/s^2
k_i : Coefficient de traînée induite $k_i = \frac{1}{\pi \lambda}$, -
m: Masse de l'avion	kq
q_1, q_2 : Coefficients du modèle de poussée (Equation 6.3, p. 119)	$(m/s)^{-1}$ et $(m/s)^{-2}$
S: Surface voilure	$(m/s)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (m/s)^{-2}$
\widetilde{T} : Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)	m^{-1}
	i i
$V_{a,i}, V_{a,f}$: Vitesse aérodynamique initiale $V_{a,i}$ et finale $V_{a,f}$ de la portion de roulage étudiée.	m/s
V_a : Vitesse aérodynamique ou vitesse de l'avion par rapport à l'air	m/s
V_k : Vitesse cinématique ou vitesse de l'avion par rapport à la piste	m/s
V_w : Vitesse du vent ou vitesse de l'air par rapport à la piste, supposée	m/s
constante et selon l'axe de la piste \overline{x}_p ($V_w > 0$ si l'avion a le vent dans le dos, $V_w < 0$ si l'avion a le vent de face)	, 0
$V_{\Gamma=0}^{\oplus}, V_{\Gamma=0}^{\ominus}$: Vitesses aérodynamiques pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$, c'est-à-dire racines réelles du polynôme de l'accélération pour $\Delta>0: V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. Au décollage $V_{\Gamma=0}^{\oplus}<0, V_{\Gamma=0}^{\oplus}>0$ et la vitesse de décollage $V_{LOF}< V_{\Gamma=0}^{\ominus}$ (Remarque A.3, p. 254). À l'atterrissage, $V_{\Gamma=0}^{\oplus}>0, V_{\Gamma=0}^{\ominus}<0$ et la vitesse de toucher des roues $V_{TD}< V_{\Gamma=0}^{\oplus}$ (Remarque A.4, p. 255).	m/s
$V_{\Gamma_{min}}$: Vitesse aérodynamique pour laquelle l'accélération $\Gamma = \Gamma_{min}$ est minimale si $A>0$ ou maximale si $A<0$. $V_{\Gamma_{min}}=-\frac{B}{2A}$.	m/s

Symboles : Désignation	Unités
α_r : Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)	rad
α_r : Incidence de l'avion au foulage (Figure 0.5, p. 116) α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de	rad
	raa
la configuration Bec/Volet adoptée.	
Δ : Discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$. Généralement positif pour le	
décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un	
décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1, p. 245).	
ΔCx_o : Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train	
d'atterrissage ΔCx_{oTrain} , au moteur en panne $\Delta Cx_{omoulinet}$, à la sortie des spoilers ΔCx_{oSP}	
- · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
ΔCz_{oSP} : Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers	
Δt : Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse ini-	s
tiale $V_{a,i}$ à la vitesse finale $V_{a,f}$ et parcourt la longueur de piste	
ΔX_k .	
ΔX_k : Distance parcourue sur la piste par l'avion au roulage pour	m
passer de la vitesse aérodynamique initiale $V_{a,i}$ à la vitesse	
aérodynamique finale $V_{a,f}$.	1.2
Γ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la	m/s^2
piste, modélisée par : $\Gamma = AV_a^2 + BV_a + C$ avec A, B, C constants	
(Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de roulage étudiée,	
l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_{a,i})$ et l'accélération fi	
nale $\Gamma_f = \Gamma(V_{a,f})$.	1.9
Γ_{min} : Accélération minimale si $A > 0$ ou maximale si $A < 0$. $\Gamma_{min} = -\Delta$	m/s^2
$\frac{-\Delta}{4A}$	7
γ_p : Pente de la piste, supposée constante	rad
λ : Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$	
μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues	
libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273).	
ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste	kg/m^3
$ ho_0$: Masse volumique au niveau de la mer : $ ho_0 = 1.225 kg/m^3$	kg/m^3

6.10 Application des modèles de roulage

Dans les sections précédentes, nous avons mis au point des modèles de roulage qui permettent de calculer les cas d'études définis par la norme FAR 25 : le roulage d'un décollage avec tous moteurs (All Engines Operating AEO), le roulage d'un décollage avec panne moteur (One Engine Inoperative OEI), le décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO). Ces modèles de roulage ont été validés par un ensemble de simulations (Appendix 4, p. 83) précises de plusieurs avions civils (ayant différents taux de propulsion, charges alaire, et finesse). L'objet de cette section est d'exploiter nos modèles de roulage. Nous commencerons par mettre en œuvre nos modèles, pour l'exemple de l'A300, afin de visualiser le comportement au roulage. Puis, nous évaluerons l'effet des becs et des volets, ainsi que l'influence de l'incidence de roulage α_r sur la longueur de piste au roulage. Enfin, nous proposerons une adaptation du modèle de la "Magic Line" au roulage.

6.10.1 Application numérique à l'A300

Afin de visualiser le comportement de l'avion au roulage, nous proposons dans ce paragraphe, de mettre en œuvre notre modèle de roulage pour le cas particulier de l'A300. Ainsi, cet exemple permettra de se rendre compte de l'évolution des paramètres avions (accélération, vitesse, et distance parcourue sur la piste au cours du roulage), au cours des roulages d'un décollage avec et sans panne et d'un décollage interrompu. Ne seront présentés ici que les résultats pour la configuration de becs et volets de décollage de l'A300. Les résultats pour les autres configurations sont donnés en annexe (Appendix A.4, p. 263).

Données et modèles de calcul

```
= 260
Surface voilure
                                                           S
Masse de l'avion
                                                       M_{MTOW}
                                                                     = 160000
                                                                                                   kq
Incidence au roulage
                                                                                                  rad
                                                           \alpha_r
Incidence de portance nulle
                                                                     = (Table 6.11, p. 166)
                                                           \alpha_0
                                                                                                  rad
Gradient de portance
                                                          Cz\alpha
                                                                     = 5
                                                                                                 rad^-
                                                         Cz_{max}
                                                                     = (Table 6.11, p. 166)
Coefficient de portance maximale
                                                                     = (Table 6.11, p. 166)
Coefficient de traînée de profil
                                                          Cx_o
Coefficient de traînée induite
                                                                     = 0.055
                                                           k_i
                                                      \Delta Cx_{oTrain}
Traînée de frottement due au train
                                                                     = 0.0175
Traînée de frottement due aux spoilers
                                                                     = 0.06
                                                        \Delta Cx_{oSP}
                                                        \Delta C z_{oSP}
Portance due aux spoilers
                                                                     = -0.15
Traînée de frottement due au moteur en panne
                                                    \Delta Cx_{omoulinet} = 0.004
Nombre de moteurs de l'avion
                                                                     = 2
Poussée au point fixe des moteurs
                                                           F_0
                                                                     = 243000 N_m
                                                                                                   N
                                                          F_{red}
Poussée des moteurs en régime réduit
                                                                     = 0
                                                                                                   N
Masse volumique de l'air au sol
                                                                     = 1.225
                                                                                                 kg/m^3
                                                           \rho_0
                                                                                                kg/m^3
Masse volumique de l'air au niveau de la piste
                                                           ρ
                                                                     = \rho_0
                                                                     = 340
Vitesse du son au sol
                                                           a
                                                                                                 m/s
Coefficient de modèle moteur
                                                                     = -0.0029
                                                           q_1
                                                                                                 s/m
                                                                     =4.33\ 10^{-6}
                                                                                                (s/m)^2
Coefficient de modèle moteur
                                                           q_2
Coefficient de frottement pneu/piste roue libre
                                                                     = 0.015
Coefficient de frottement pneu/piste au freinage :
                                                                     = 0.4
                                                           \mu_f
                                                                                                 m/s^2
Constante de gravité terrestre
                                                           g
Pente de la piste
                                                                                                  rad
                                                           \gamma_p
Vitesse de décrochage (stall) à 1g
                                                          V_{S1}
                                                                     = (Table 6.12, p. 166)
                                                                                                 m/s
Vitesse de rotation
                                                           V_R
                                                                       (Table 6.12, p. 166)
                                                                                                 m/s
                                                                       (Table 6.12, p. 166)
Vitesse de décision
                                                           V_1
                                                                                                 m/s
                                                                     = (Table 6.12, p. 166)
Vitesse où le moteur tombe en panne
                                                          V_{EF}
                                                                                                 m/s
Temps entre panne et réaction du pilote
                                                       \Delta t_{
m réaction}
```

Tab. 6.10 – A300 : Données utilisées

Pour cet exemple d'application à l'A300, le modèle simple de Jack D. Mattingly [Mat96] a été utilisé pour modéliser la poussée moteur. Ce modèle de poussée est représentatif des performances moteurs au décollage 6 .

$$\frac{F_{max}}{F_0} \ = \ 1 - M + \frac{1}{2}M^2 \ = \ 1 - \frac{1}{a}aM + \frac{1}{2a^2}\left(aM\right)^2 \ = \ 1 - \frac{1}{a}V + \frac{1}{2\,a^2}V^2$$
 d'où $q_1 = -\frac{1}{a} \qquad q_2 = \frac{1}{2\,a^2}$

Aucun sur-régime du moteur non en panne n'a été pris en compte.

N'ayant pas le droit d'utiliser la réverse pendant les démonstrations de certifications (excepté pour le freinage d'un décollage interrompu sur piste mouillée ou enneigée), la poussée réduite ne peut pas être considérée négative.

En fait, pour cette application numérique à l'A300, la poussée réduite au freinage du décollage interrompu (RTO : Rejected Take-Off) a été considérée comme nulle.

Données Avions [Boi01a]						
Configuration de l'avion	α_0 (degrés)	Cx_o	Cz_{max}			
Avion lisse (0)	- 2.0	0.0175	1.306			
Becs 17°(1)	- 2.0	0.0293	1.728			
Becs 17 ° Volets 15 ° (2)	- 8.0	0.0360	2.251			
Becs 25 ° Volets 22 ° (3)	-11.4	0.0418	2.679			
Becs 25 ° Volets 41 ° (4)	-16.6	0.0758	3.133			

Tab. 6.11 – Configuration de becs/volets de l'A300 (Figure 6.13, p. 167)

Les vitesses ont été calculées de la manière suivante :

$$V_{S1} = \sqrt{\frac{MMTOW^g}{\frac{1}{2}\rho SCz_{max}}}$$
 d'après l'équation de sustentation $V_R = 1.15\,V_{S1}$ Marge arbitraire par rapport au décrochage [Lau92]. $V_1 = 0.933\,V_R$ approche statistique sur des bimoteurs $V_{EF} = V_1 - \Delta V_{EF}$ cf. FAR 25.107(a)

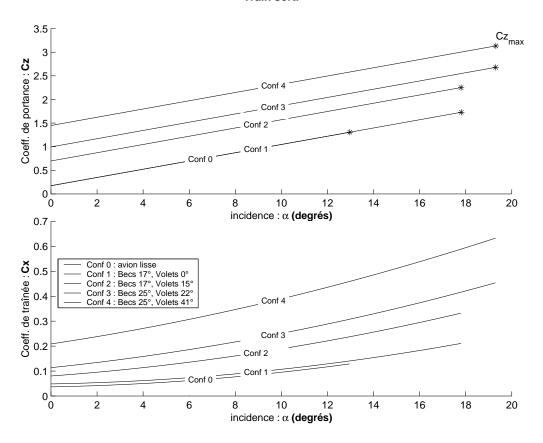
 ΔV_{EF} est le gain de vitesse pris par l'avion entre la panne moteur à V_{EF} et la réaction du pilote face à la panne à la vitesse de décision V_1 . Cet écart est donnée (Equation 6.7, p. 128) par le temps moyen de réaction du pilote (dans notre application numérique 1.5s) où la panne apparaît au moment le plus défavorable obligeant le pilote à prendre une décision au moment le plus critique c'est-à-dire à V_1 .

Vitesses calculées						
Configuration de l'avion	V_{S1}	V_R	V_1			
	(m/s)	(m/s)	(m/s)			
Avion lisse (0)	86.9	99.9	93.2			
Becs 17°(1)	75.5	86.9	81.0			
Becs 17 ° Volets 15 ° (2)	66.2	76.1	71.0			
Becs 25 ° Volets 22 ° (3)	60.7	69.8	65.1			
Becs 25 ° Volets 41 ° (4)	56.1	64.5	60.2			

TAB. 6.12 – Vitesses calculées : de décrochage à 1g V_{S1} , de rotation V_R et de décision V_1 .

⁶Pour de meilleures précisions, nous aurions pu utiliser notre modèle de poussée moteur [Rou02]. Cependant le but de cette application numérique n'est pas de simuler exactement les performances d'un A300 mais seulement de montrer le comportement général au roulage d'un avion. Il en va de même pour les vitesses au décollage, nous n'avons pas cherché les vitesses optimales mais considéré simplement des ordres de grandeurs plausibles.

Aérodynamique de l'A300 selon la configuration Becs/Volets Train sorti



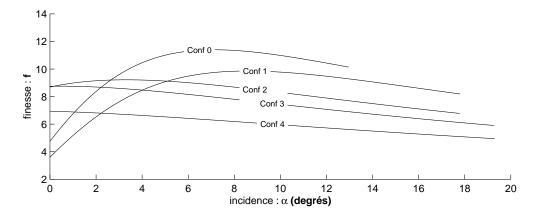


FIG. 6.13 – Aérodynamique de l'A300 avec train sorti, selon la configuration de becs/volets choisie, et en fonction de l'incidence de vol α . Ce qui nous intéressera plus particulièrement pour notre application numérique du roulage, c'est l'aérodynamique des configurations pour des incidences faibles $\alpha_r \approx 0$.

Cohérence de la simulation numérique et de nos modèles

Deux types de calcul de distance de roulage et de vitesse de roulage sont faits.

L'un est l'utilisation des solutions des résolutions analytiques que nous avons élaborées dans les sections précédentes : la résolution cinétique (Table 6.3, p. 134), qui permet de tracer la distance et le temps de roulage, en fonction de la vitesse de roulage, et la résolution temporelle (Table 6.4, p. 138) qui permet de tracer l'évolution de la vitesse et la distance de roulage, en fonction du temps de roulage.

L'autre est une résolution numérique de l'équation différentielle de Riccati par la méthode d'Euler (intégration numérique). Nos modèles concordent évidemment avec la simulation numérique puisque nos modèles sont une résolution analytique exacte, sans approximation.

Néanmoins, notons le désavantage de l'intégration numérique par rapport à nos modèles analytiques : pour une bonne concordance, il faut prendre un maillage de temps assez fin pour la résolution numérique ce qui alourdit le temps de calcul contrairement à notre solution analytique qui donne le résultat très rapidement, sans moyens informatiques sophistiqués⁷.

Estimation des décollages exigés par la norme FAR 25

Pour chacune des configurations becs/volets de l'A300, nous calculons la longueur et le temps de roulage d'un décollage avec ou sans panne moteur, et la longueur de piste et le temps d'un décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) avec ou sans panne moteur.

Configuration de l'avion	décolla	age AEO	O Décollage OEI		RTO avec panne		RTO sans panne	
	L_{p_r} (m)	$t_{p_r} \atop (s)$	L_{p_r} (m)	$t_{p_r} \atop (s)$	L_p (m)	$t_p \ (s)$	L_p (m)	$t_p \ (s)$
Avion lisse (0)	2310	42.9	3045	50.5	3247	64.6	3159	63.6
Becs 17°(1)	1694	36.4	2222	42.7	2454	56.0	2379	55.0
Becs 17 ° Volets 15 ° (2)	1285	31.6	1713	37.4	1985	50.8	1918	49.8
Becs 25 ° Volets 22 ° (3)	1085	29.0	1482	34.9	1714	47.4	1651	46.4
Becs 25 ° Volets 41 ° (4)	994	28.1	1615	38.1	1550	45.5	1484	44.3

TAB. 6.13 – Résultats des calculs de roulage de l'A300 calculés par notre modèle de résolution cinétique (Table 6.3, p. 134).

Seule la configuration de décollage (Figure 6.14, p. 169) est détaillées dans ce paragraphe. Les simulations des autres configurations sont néanmoins répertoriées en annexe (Appendix A.4, p. 263).

⁷À titre indicatif, les calculs ont été effectués sur un pentium III 933MHz, 384Mo de ram avec MATLAB 5.3 : le temps de calcul est de l'ordre de 0.01s pour nos modèles, et de 0.3s pour l'intégration numérique (avec un maillage de temps suffisamment correct pour obtenir de bons résultats).

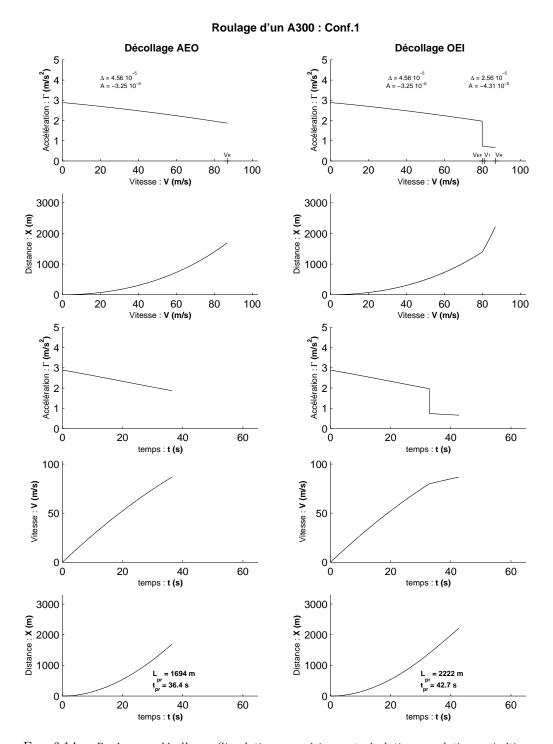


Fig. 6.14 — Roulage au décollage : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces applications numériques ont été faites en configuration de décollage, c'est-à-dire en configuration (1) : Becs 17 ° Volets 0 °.

Quelques remarques sur le roulage au décollage sans panne moteur (AEO All Engines Operating) :

Quelle que soit la configuration de becs/volets, l'accélération est toujours positive de 0 à V_R ce qui permet d'envisager un roulage pour décoller. La vitesse croît donc jusqu'à la vitesse de rotation sans encombre sur une longueur de piste au roulage qui semble raisonnable car du même ordre de grandeur que celle calculée par le modèle courant d'une accélération moyenne à $0.7V_R$.

Quelques remarques sur le roulage au décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative) :

Tout se passe comme pour le cas précédent de décollage sans panne moteur (AEO : All Engines Operating), jusqu'à ce qu'un des moteurs tombe en panne à V_{EF} .

Remarque 6.13 Notons que V_{EF} est, par définition de la norme, la vitesse la plus critique où apparaît une panne de manière à ce que le pilote prenne sa décision d'interrompre ou de continuer le décollage au moment de la vitesse de décision V_1 . La différence entre V_{EF} et V_1 est déterminée par le temps moyen de réaction du pilote (Equation 6.7, p. 128). Pour ce calcul, ce temps de réaction a été considéré arbitrairement à 1.5s. Ceci paraît cohérent car le pilote est assez attentif à ce problème en phase de décollage et donc 1.5 secondes pour agir sur les freins, réduire la poussée, ..., paraît un ordre de grandeur plausible. Richard S. Shevell [She88] parle d'ailleurs d'un temps de réaction pilote de l'ordre de 1 à 2 secondes. Cela dit, ce temps est plutôt de l'ordre de $\Delta t_{\rm réaction} = 0.6\,s$ d'après Jacques Rosay [Ros05].

Notons que notre choix du temps de réaction à 1.5s coûte un peu plus de 100 m de piste.

À V_{EF} , la perte de poussée due à la panne d'un des moteurs⁸ engendre une chute brutale de l'accélération qui, quelle que soit la configuration de becs et volets, reste positive, ce qui permet à l'avion de continuer à accélérer pour atteindre la vitesse de rotation V_R . Ce n'est donc pas le roulage qui empêcherait l'A300 de décoller avec panne moteur (nous verrons au contraire que la montée sera impossible avec panne moteur et avec trop d'hypersustentation sortie). Le pilote prend sa décision à la vitesse critique V_1 et décide de continuer le décollage. L'accélération étant plus faible, la vitesse croît moins vite ce qui augmente donc la longueur de piste nécessaire pour atteindre V_R . Un A300 (en configuration 2) avec tous ses moteurs en action met 428m de piste au roulage de moins que s'il perd un moteur à 1.5s de V_1 .

⁸Cette perte est supposée brutale ce qui en pratique est plus progressif, donc plus avantageux.

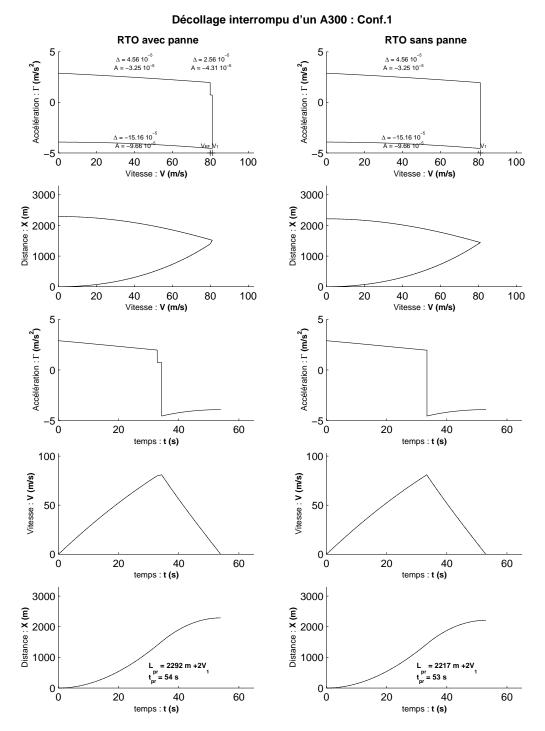


Fig. 6.15 – Longueur de piste RTO : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces applications numériques ont été faites en configuration de décollage, c'est-à-dire la configuration (1) : Becs 17 ° Volets 0 °.

Quelques remarques sur le décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) :

La norme FAR 25 impose d'étudier le cas du décollage interrompu avec ou sans panne moteur. En fait, les applications à l'A300 montrent que c'est le cas avec panne moteur qui est le plus critique.

Sans panne moteur:

Tout se passe comme le cas précédent du décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative), jusqu'à la V_1 où cette fois-ci le pilote décide d'interrompre le décollage et freine, réduit la poussée, sort les spoilers. Ceci a pour conséquence de faire chuter l'accélération pour qu'elle devienne négative, ce qui permet le freinage de l'avion jusqu'à son arrêt complet.

Remarque 6.14 Si un avion en configuration de freinage se retrouve dans le cas de figure $\Delta>0,\ A>0,\ C<0,$ il faut non seulement vérifier que sa vitesse de toucher à l'atterrissage $V_{TD}<\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A},$ dans le cas contraire l'atterrissage est impossible, mais également que $V_1<\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A},$ pour permettre d'effectuer un décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) si besoin est.

On retrouve bien les deux changements de pentes dans l'évolution de la vitesse en fonction du temps. La vitesse croit fortement quand le temps s'écoule, jusqu'à V_{EF} , puis a plus de mal à croître jusqu'à V_1 pendant le temps de réaction pilote de 1.5s, puis décroît fortement jusqu'à l'arrêt complet de l'appareil.

La distance au roulage calculée représente alors la longueur de piste totale parcourue par l'avion puisque ce cas ne contient que des phases de roulage (à ceci près que la norme FAR 25.109 prévoit de rajouter à cette longueur, une distance forfaitaire de $2V_1$).

 $Avec\ panne\ moteur:$

Cette fois-ci le pilote décide d'interrompre le décollage au moment le plus critique (à V_1) pour une autre raison (il n'y a pas de panne moteur). L'avion accélère fortement jusqu'à V_1 puis freine ensuite jusqu'à l'arrêt de l'avion. Pour ce cas étudié de l'A300, ce décollage interrompu sans panne moteur n'est pas dimensionnant puisque la longueur de piste totale est inférieure à celle du décollage interrompu avec panne moteur.

6.10.2 Effet des becs et volets sur le roulage

Rappel aérodynamique

Les becs et les volets sont des dispositifs d'hypersustentation situés respectivement à l'avant et à l'arrière de la voilure. De conception parfois assez différente (Figure 6.16, p. 173), ils ont pour principal but d'augmenter le coefficient de portance maximale Cz_{max} .

Dispositifs d'hyper	sitifs d'hypersustentation		ge typique	$\frac{Cz_{max}}{\cos \varphi_{25\%}}$	
bord de fuite	bord d'attaque	décollage	atterrissage	décollage	atterrissage
Plain	-	20°	60°	1.40 - 1.60	1.70 - 2.00
Single slotted	-	20°	40°	1.50 - 1.70	1.80 - 2.20
Single slotted Fowler	-	15°	40°	2.00 - 2.20	2.50 - 2.90
Double slotted ¹	-	20°	50°	1.70 - 1.95	2.30 - 2.70
	Slat	20°	50°	2.30 - 2.60	2.80 - 3.20
Triple slotted ¹	Slat	20°	40°	2.40 - 2.70	3.20 - 3.50

 $^{^{1}}$: with varying amounts of chord extension (Fowler motion)

Tab. 6.14 – Coefficients de portance max. voilure Cz_{max} [Tor86].

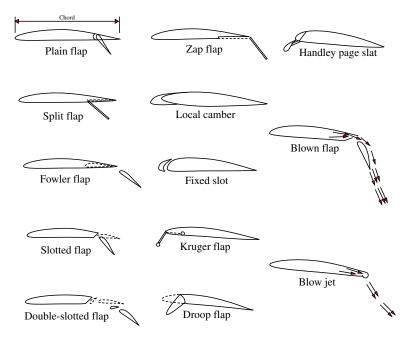


Fig. 6.16 – Dispositifs d'hypersustentation : divers systèmes de becs et volets [Lec02].

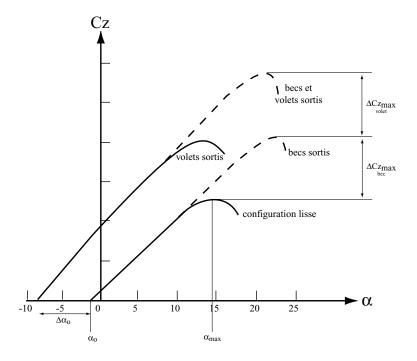


Fig. 6.17 – Évolution du coefficient de portance Cz en fonction de l'incidence α avec ou sans dispositifs d'hypersustentation (inspiré de [Tor86]).

La sortie des becs a pour effet d'augmenter l'incidence maximale de décrochage α_{\max} , et par conséquent d'augmenter le coefficient de portance maximale Cz_{max} (Figure 6.17, p. 173). La sortie des volets a pour principal effet de décaler l'incidence de portance nulle α_0 . L'incidence de portance maximale α_{\max} diminuant dans une plus faible proportion, le coefficient de portance maximale Cz_{max} en est augmenté. Le gradient de portance Cz_{α} est également légèrement modifié par les volets. Contrairement aux becs, pour une même incidence α , le coefficient de portance Cz est augmenté par la sortie des volets.

Ces phénomènes se retrouvent sur les différentes configurations de becs/volets de l'A300. Plus les configurations augmentent, c'est-à-dire plus les hypersustentateurs sont sortis, plus le coefficient de portance maximale Cz_{max} augmente (Table 6.11, p. 166). L'incidence de portance nulle α_0 reste inchangée lors de la sortie de becs (Figure 6.13, p. 167) : entre la configuration (0) lisse, et la configuration (1) becs à 17°. Par contre, la sortie des volets, de la configuration (3) par exemple, rend cette incidence α_0 encore plus négative. Notons que la traînée augmente aussi lors de la sortie des hypersustentateurs ce qui sera d'une grande importance par la suite pour l'étude du roulage mais surtout de la phase aérienne du décollage.

Vitesses de décollage/atterrissage plus faibles

Un modèle simple de la longueur de piste au roulage, qui consiste à considérer une accélération moyenne Γ constante correspondant à la vitesse $0.7V_R$, montre que la longueur de piste au roulage L_{p_r} croît fortement lorsque la vitesse de rotation V_R croît :

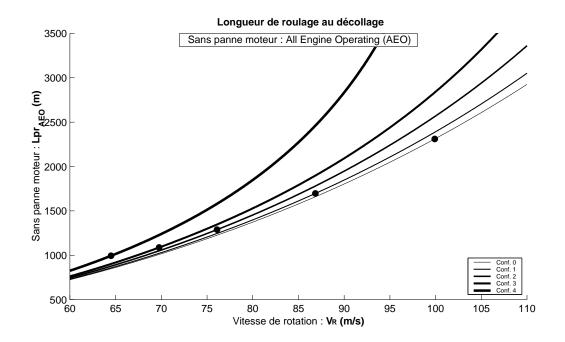
$$\frac{1}{2} \frac{{V_R}^2}{\Gamma(0.7V_R)}$$

C'est aussi le cas (Figure 6.18, p. 175) pour notre modèle sophistiqué de longueur de piste au roulage (Table 6.3, p. 134).

Pour que la longueur de piste au roulage ne soit pas trop grande, on a donc tout intérêt à concevoir un avion dont la vitesse de rotation V_R est faible. Or, l'avion conçu pour la croisière, aurait des vitesses de décollage/atterrissage très élevées s'il restait en configuration lisse. C'est pourquoi il est doté de dispositifs d'hypersustentation (Figure 6.17, p. 173) qui augmente le coefficient de portance maximale Cz_{max} , et qui réduit donc les vitesses de "minimum unstick" V_{mu} et de décrochage $V_{S1} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}\rho SCz_{max}}}$. Comme ces deux dernières vitesses définissent toutes les autres vitesses de décollage et atterrissage, sortir les becs/volets permet de réduire les vitesses de décollage et d'atterrissage.

C'est la raison d'être des dispositifs d'hypersustentation : diminuer les vitesses de décollage et d'atterrissage dans le but de diminuer la longueur de piste nécessaire.

Ces phénomènes se retrouvent bien pour le cas de l'A300. Plus les hypersustentateurs sont sortis, plus le coefficient de portance maximale Cz_{max} est élevé (Table 6.11, p. 166), et plus la vitesse de rotation V_R diminue (Table 6.12, p. 166). La longueur de piste au roulage L_{p_r} diminue bien pour l'A300 plus les becs/volets sont sortis, excepté pour le cas atypique de la configuration (4) en cas de panne moteur. Ceci est essentiellement dû à la traînée de cette configuration comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe.



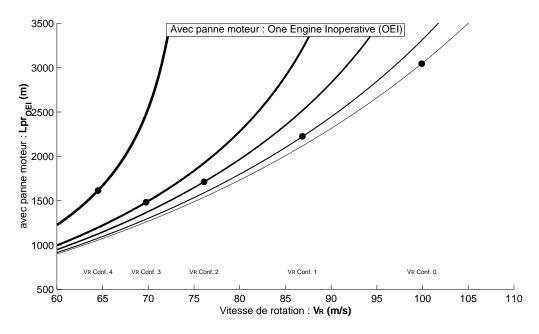


Fig. 6.18 – Longueur de piste au roulage d'un décollage avec ou sans panne moteur selon les configurations de Becs/Volets de l'A300. Pour ce calcul, la rotation a été négligée ($V_R = V_{LOF}$).

Attention à la traînée!

Nous venons de voir que plus les hypersustentateurs sont sortis, plus les vitesses de décollage et d'atterrissage sont réduites, dans le but de diminuer la longueur nécessaire de piste au roulage. Pour l'A300, cela est effectivement le cas sauf pour la configuration (4) en cas de panne moteur. Dans ce paragraphe nous allons tenter de comprendre pourquoi.

Impact de la modification des coefficients aérodynamiques par les becs/volets: Considérons le roulage au décollage d'un A300 en cas de panne moteur. Le premier graphique de la figure (Figure 6.19, p. 177) montre l'évolution de la longueur de piste au roulage $L_{p_{rOEI}}$ en fonction du coefficient de portance maximale Cz_{max} , c'est-à-dire en fonction de la configuration becs/volets.

Le tracé ponctué par des cercles représente le cas réel de l'A300. On retrouve en effet que la longueur de piste au roulage décroît plus on sort des hypersustentateurs excepté pour la configuration (4), ce que montraient nos calculs précédents (Table 6.13, p. 168). Le tracé ponctué d'étoiles met en évidence que le phénomène de la configuration (4) vient du terme de la traînée réduite $\tilde{T}_r = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \left(Cx - \mu_r Cz \right)$ puisqu'en considérant les coefficients aérodynamiques Cx = 0 et Cz = 0, c'est-à-dire $\tilde{T}_r = 0$, la longueur de piste au roulage de la configuration (4) est bien inférieure à celle de la configuration(3). Par contre, on garde bien l'effet de la diminution de longueur de piste au roulage due à l'augmentation du Cz_{max} et donc de la diminution de la vitesse de rotation V_R .

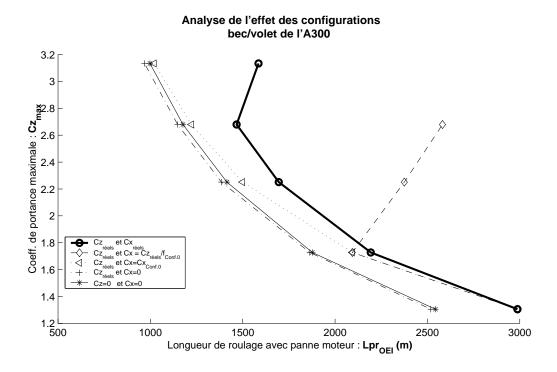
Le tracé ponctué de croix montre le faible effet bénéfique de l'allégement de l'avion dû à sa portance $\mu_r Cz$. Lorsque les volets sortent, cela modifie l'incidence de portance nulle α_0 (il croît dans les négatifs (Table 6.11, p. 166)), augmentant ainsi le coefficient de portance $Cz = Cz\alpha (\alpha_r - \alpha)$. C'est pourquoi le tracé de $Cz - \mu_r Cz$ décroît lorsque la configu-

ration augmente. La traînée réduite \widetilde{T}_r diminuant, la longueur de piste de roulage est donc plus courte. Il est donc normal que la courbe Cx=0 et Cz=0 ait des longueurs de piste au roulage plus importante que celle de Cx=0 et $Cz_{\text{réels}}$. Retenons donc que l'effet positif du Cz est très faible.

Ce qui n'est pas le cas du coefficient de traînée Cx. Le tracé ponctué de triangles, montre que le simple fait de considérer une traînée Cx, même constante, pénalise la longueur de piste, surtout à faible hypersustentation. En réalité la traînée Cx croît d'autant plus que les becs/volets sont sortis. En comparaison avec le tracé de l'A300 (tracé ponctué de cercles), on peut déduire que l'évolution réelle du coefficient de traînée Cx est à l'origine du fait qu'il est plus pénalisant de décoller avec panne moteur en configuration (4) plutôt qu'en (3).

Le tracé ponctué de losanges considère une finesse constante, celle de la configuration lisse (0). Chaque coefficient de traînée est calculé à finesse constante $Cx = \frac{Cz_{\text{récls}}}{f_{Conf.0}}$. Seule la configuration (1) a en pratique une moins bonne finesse que la (0) pour une incidence de roulage nulle $\alpha_r = 0$ (Figure 6.13, p. 167). Par conséquent, le coefficient de traînée calculée avec finesse constante est plus élevé que le coefficient de traînée réel, excepté pour la configuration (1), et donc la longueur de piste au roulage en est d'autant plus pénalisée. Nous avons vu que plus on sort d'hypersustentateur, plus la vitesse V_R est faible et plus la longueur de roulage diminue, jusqu'à une inversion en configuration (4). En augmentant l'effet de la traînée, l'inversion se fait plus tôt.

La traînée provoquée par les hypersustentateurs est donc un phénomène auquel il faut prêter attention au décollage car si elle devient trop importante, la longueur de piste au roulage peut en être pénalisée.



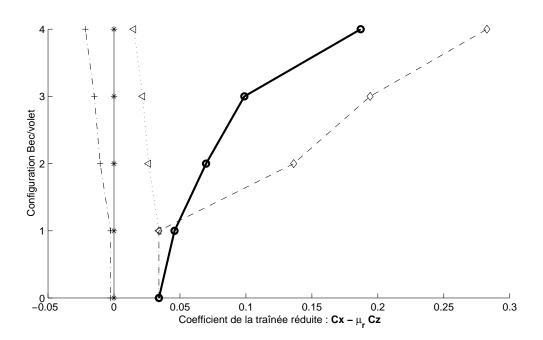


Fig. 6.19 — Influence de la traînée des configurations de becs/volets sur la longueur de piste au roulage avec panne moteur.

La traînée Cx peut contrer le gain de Cz_{max} : Le principal effet produit par la sortie des dispositifs hypersustentateurs est de diminuer la longueur de piste par la diminution des vitesses de décollage/atterrissage nécessaires. Le seul cas qui échappe à la règle est le roulage d'un décollage avec panne moteur (OEI : One Engine Inoperative), en configuration (4) dont la longueur de piste au roulage est plus importante que celle de la configuration (3). Cela est dû à un effet secondaire de la sortie des hypersustentateurs. La sortie de tels dispositifs, modifient l'accélération de l'avion par l'intermédiaire des coefficients aérodynamiques du terme de traînée réduite \widetilde{T} . Nous avons vu que c'est essentiellement le terme de traînée Cx qui était influent. Cela modifie par conséquent, pour un discriminant $\Delta > 0$, la vitesse d'accélération nulle $V_{\Gamma=0}^{\ominus} = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. Or, pour envisager un décollage possible, il faut que la vitesse de décollage soit inférieure à cette vitesse $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$ car, à cette vitesse, l'accélération est nulle et donc l'avion reste à vitesse constante sans jamais atteindre de vitesses supérieures.

Pour le cas de la configuration (4) avec panne moteur, on est justement proche de ce cas limite où l'avion est pénalisé par le manque de poussée et une mauvaise finesse (pour une incidence de roulage nulle, la finesse de la configuration (4) est moins bonne que celle de la configuration (3) (Figure 6.13, p. 167).

Nous verrons que pour chaque configuration, il existe une incidence de roulage optimale (Section 6.10.3, p. 180) et que cet optimum pour la configuration (4) est très différent de celui considéré ici $\alpha_r = 0$.). La vitesse critique de non décollage $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$ se rapproche dangereusement de la vitesse de rotation V_R , de sorte que la courbe représentant la longueur de piste au roulage (avec panne moteur) de la configuration (4) en fonction de la vitesse (Figure 6.18, p. 175), diverge jusqu'à la vitesse de 75 m/s au delà de laquelle l'avion est incapable de décoller. Heureusement la vitesse de rotation V_R de la configuration (4) est inférieure à cette vitesse critique de non décollage $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$, ce qui permet tout de même à l'avion d'entamer la phase aérienne, mais cela augmente fortement la longueur de piste.

Choix des dispositifs hypersustentateurs

Il faut retenir à propos des hypersustentateurs, leur principal effet à diminuer la longueur de piste au roulage, par la diminution des vitesses de décollage/atterrisage du fait de l'augmentation du coefficient de portance maximal Cz_{max} . L'effet secondaire des becs/volets est d'augmenter la traînée qui peut devenir prépondérante en cas de poussée faible. Au décollage avec panne moteur cela peut être pénalisant de trop déployer les becs/volets : on choisira alors une position intermédiaire. Nous verrons que la sortie des hypersustentateurs est encore plus restreinte par la phase aérienne du décollage (contrainte de la pente minimale) que par la phase de roulage. Avec un modèle continu, en fonction du braquage des becs et volets, des coefficients de portance et traînée dues aux hypersustentateurs, la configuration optimale pour le roulage pourrait être mise en évidence, ainsi que la configuration optimale de la phase aérienne.

Pour l'atterrissage, l'augmentation de la traînée est au contraire appréciable car elle aide l'avion à décélérer, en plus du choix d'une pente piste positive $\gamma_p \geq 0$ et de la réduction de la poussée des moteurs. La forte hypersustentation, choisie pour diminuer la vitesse de toucher des roues V_{TD} , a également l'avantage de créer une plus grande traînée favorable à la décélération de l'avion.

C'est le cas en pratique pour l'A300 qui choisit la configuration (1) pour le décollage et la (4) pour l'atterrissage (avec la configuration (4) qui a judicieusement été conçu avec une moins bonne finesse).

Un modèle continu de l'effet des dispositifs d'hypersustentation permettrait de déterminer la configuration optimale au roulage qui minimise la longueur de piste au roulage

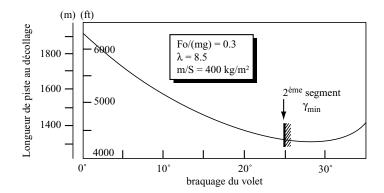


FIG. 6.20 - E. Torenbeek ([Tor86] p.381) montre que pour un avion de transport civil moyen, la configuration des volets au décollage est limitée par le critère de pente minimale γ_{min} en cas de panne moteur.



(a) A320 au décollage : sortie intermédiaire des dispositifs d'hypersustentation. photo : Stefan Kunert



(b) A319 à l'atterrissage : sortie maximale des becs et des volets. Les spoilers, sur le dessus de la voilure, sont déployés pour favoriser la décélération de l'avion. photo : Ian Woodcock

avec panne moteur. Nous verrons par la suite, qu'en fait, en configuration (4) avec panne moteur, l'avion est incapable de décoller car incapable d'effectuer la phase aérienne du décollage, et d'assurer la pente minimale de montée. Il y aura également une configuration optimale pour la phase aérienne du décollage avec panne moteur.

CE QU'IL FAUT RETENIR 6.3 Les hypersustentateurs diminuent les vitesses de décollage/atterrissage nécessaires, ce qui a pour principal effet de réduire la longueur de piste au roulage. Mais n'en concluons pas trop hâtivement, qu'il faille sortir tous les becs et volets car, en cas de panne moteur, l'avion est incapable de décoller. Il faudra donc faire un compromis sur la sortie des hypersustentateurs et choisir une configuration intermédiaire pour le décollage. À l'atterrissage, toute l'hypersustentation est déployée.

6.10.3 Incidence optimale de roulage α_r

La géométrie de l'avion et de son train d'atterrissage détermine la valeur de l'incidence au roulage α_r (Figure 6.3, p. 118). Lors de la conception de l'avion, cette incidence doit être choisie judicieusement car elle influence la longueur de piste au roulage au travers du terme de la poussée réduite $\tilde{F} = \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0}$ ($\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r$) et de la traînée réduite $\tilde{T} = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} (Cx - \mu Cz)$ par les coefficients aérodynamiques Cx et Cz.

Dans ce paragraphe, nous proposons de déterminer l'expression analytique de l'incidence de roulage optimale. L'idéal serait de trouver l'expression de cette incidence de roulage qui minimise la longueur de piste au roulage L_{p_r} . Seulement, pour un développement analytique, la tâche n'est pas aisée pour notre modèle de longueur de piste (Table 6.3, p. 134), et même à l'aide de logiciels tels que MAPLE, aucune solution analytique simple n'a pu être trouvée. C'est pourquoi, nous nous proposons de chercher l'expression analytique de cet optimum pour des modèles de roulage moins complexes.

Prenons le modèle simple de la longueur de piste au roulage consiste à considérer une accélération Γ constante, moyenne, généralement prise à $V = 0.7V_R$.

$$L_{p_r} = \frac{1}{2} \frac{V_R^2}{\Gamma}$$

Sachant que la vitesse de rotation V_R ne dépend pas de l'incidence de roulage α_r , la longueur de piste au roulage minimale est donc donnée par :

$$\frac{dL_{p_r}}{d\alpha_r} = 0$$

$$= -\frac{1}{2}V_R^2 \frac{\frac{d\Gamma}{d\alpha_r}}{\Gamma^2}$$

Ce qui revient à chercher l'accélération moyenne maximale $\frac{d\Gamma}{d\alpha_r}=0$.

Pour un modèle de poussée sophistiqué $F_{max}=F_0\frac{\rho}{\rho_0}\left(1+q_1V+q_2V^2\right)$ et un coefficient de frottement pneu/piste μ_r constant, l'accélération est de la forme (Equation 6.4, p. 120) :

$$\Gamma = \widetilde{F} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2 \right) - \widetilde{T} V^2 - \widetilde{f}_r$$

$$\frac{d\Gamma}{d\alpha_r} = \frac{d\widetilde{F}}{d\alpha_r} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2 \right) - \frac{d\widetilde{T}}{d\alpha_r} V^2 - \underbrace{\frac{d\widetilde{f}_r}{d\alpha_r}}_{=0}$$

Nous déterminerons d'abord l'optimum propulsif qui consiste à maximiser le terme de poussée réduite \widetilde{F} , c'est-à-dire $\frac{d\widetilde{F}}{d\alpha_r}=0$. Nous déterminerons ensuite l'optimum aérodynamique qui consiste à minimiser le terme de traînée réduite \widetilde{T} , c'est-à-dire $\frac{d\widetilde{T}}{d\alpha_r}=0$. Puis, nous déterminerons l'optimum dynamique, moyenne pondérée de ces deux optima, qui consiste à maximiser l'accélération $\frac{d\Gamma}{d\alpha_r}=0$, ce qui revient à minimiser la longueur de piste au roulage pour un modèle simple de cette dernière. Enfin, pour valider ces modèles d'incidence optimale de roulage, nous confronterons leurs prédictions avec l'optimum trouvé numériquement pour chacune des configurations de Becs/Volets de l'A300. Nous étudierons également numériquement, l'évolution de la longueur de piste au roulage en fonction de l'incidence de roulage.

Optimum propulsif de l'incidence de roulage

Pour trouver l'incidence de roulage α_r qui maximise la poussée réduite \widetilde{F} , il faut trouver l'incidence qui annule la dérivée de la poussée réduite \widetilde{F} par rapport à α_r .

$$\begin{split} \widetilde{F} &= \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\cos \alpha_r + \mu_r \sin \alpha_r \right) \\ \frac{d\widetilde{F}}{d\alpha_r} &= \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(-\sin \alpha_r + \mu_r \cos \alpha_r \right) \\ \text{maximal quand } \frac{d\widetilde{F}}{d\alpha_r} &= 0 \\ \text{c'est-\`a-dire } \tan \alpha_r &= \mu_r \\ \alpha_r &= \tan^{-1}(\mu_r) \end{split}$$

Si l'incidence au roulage est petite, on peut linéariser :

$$\alpha_r \approx \mu_r$$

Le coefficient de frottement pneu/piste au roulage μ_r étant de l'ordre de 0.015, l'incidence de roulage selon l'optimum propulsif est de l'ordre de 0.86 degrés.

Nous verrons qu'en fait ce modèle ne donne pas de bonnes prédictions car l'incidence au roulage a beaucoup plus d'impact sur la traînée que sur la poussée.

Optimum aérodynamique de l'incidence de roulage

Pour trouver l'incidence de roulage α_r qui maximise la traînée réduite \widetilde{T} , il faut trouver l'incidence qui annule la dérivée de la traînée réduite \widetilde{T} par rapport à α_r .

$$\begin{split} \widetilde{T} &= \frac{1}{2}\rho\frac{S}{m}\left(Cx - \mu_rCz\right) \\ \frac{d\widetilde{T}}{d\alpha_r} &= \frac{d\widetilde{T}}{dCz}\frac{dCz}{d\alpha_r} \\ \text{Or} & Cx = Cx_o + k_iCz^2 \quad \text{et} \quad Cz = Cz_{\alpha}\left(\alpha_r - \alpha_0\right) \\ \frac{d\widetilde{T}}{d\alpha_r} &= \frac{1}{2}\rho\frac{S}{m}\left(2k_iCz - \mu_r\right) \, Cz_{\alpha} \\ &= \frac{1}{2}\rho\frac{S}{m}\left(2k_iCz_{\alpha}\left(\alpha_r - \alpha_0\right) - \mu_r\right)Cz_{\alpha} \end{split}$$
 minimal quand $\frac{d\widetilde{T}}{d\alpha_r} = 0$ c'est-à-dire $2k_iCz_{\alpha}\left(\alpha_r - \alpha_0\right) - \mu_r = 0$

$$\alpha_r = \alpha_0 + \frac{\mu_r}{2k_i C z_\alpha}$$

La théorie de la ligne portante permet d'exprimer les coefficients k_i et Cz_{α} en fonction de l'allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$:

$$k_i = \frac{1}{\pi \lambda}$$

$$Cz\alpha = \frac{2\pi}{1 + \frac{2}{\lambda}}$$

$$\alpha_r = \alpha_0 + \frac{\lambda + 2}{4}\mu_r$$

La moyenne des allongements des avions de transport civil (moyenne des données des Airbus, Boeing et Mc Douglas), est de l'ordre de $\lambda = 7.75$, ce qui revient à une incidence de roulage optimale de l'ordre de :

$$\alpha_r = \alpha_0 + 2.44 \,\mu_r$$

Le coefficient de frottement pneu/piste au roulage étant de l'ordre de $\mu_r \approx 0.015$, l'incidence de roulage selon l'optimum aérodynamique est de l'ordre de : $\alpha_r = \alpha_0 + 2.1^{\circ}$.

Optimum dynamique de l'incidence de roulage

L'optimum dynamique consiste à minimiser la longueur de piste, ce qui revient à maximiser l'accélération.

$$\frac{d\Gamma}{d\alpha_r} = 0 = \frac{d\widetilde{F}}{d\alpha_r} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2 \right) - \frac{d\widetilde{T}}{d\alpha_r} V^2 - \underbrace{\frac{d\widetilde{F}_r}{d\alpha_r}}_{=0}$$

Nous avons déjà déterminé les expressions des dérivées de la poussée \widetilde{F} et traînée \widetilde{T} réduites, dans le paragraphe précédent :

$$\begin{split} \frac{d\tilde{F}}{d\alpha_r} &\approx \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\mu_r - \alpha_r\right) \\ \frac{d\tilde{T}}{d\alpha_r} &= \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \left(2k_i C z \alpha \left(\alpha_r - \alpha_0\right) - \mu_r\right) C z \alpha \\ \text{d'où } \frac{d\Gamma}{d\alpha_r} &= \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\mu_r - \alpha_r\right) \left(1 + q_1 V + q_2 V^2\right) - V^2 \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \left(2k_i C z \alpha \left(\alpha_r - \alpha_0\right) - \mu_r\right) C z \alpha \\ \text{or } F_{max} &= F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2\right) \\ \text{d'où } \frac{d\Gamma}{d\alpha_r} &= -\left(\frac{F_{max}}{m} + \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} V^2 C z \alpha^2 2 k_i\right) \alpha_r \\ &+ \frac{F_{max}}{m} \mu_r + \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} V^2 C z \alpha^2 2 k_i \left(\alpha_0 + \frac{\mu_r}{2k_i C z \alpha}\right) \end{split}$$

L'accélération Γ est maximale quand $\frac{d\Gamma}{d\alpha_r}=0$, ce qui donne l'expression de l'incidence de roulage de l'optimum dynamique suivante :

$$\alpha_r = \frac{F_{max} \mu_r + \frac{1}{2} \rho S V^2 C z \alpha^2 2 k_i \left(\alpha_0 + \frac{\mu_r}{2 k_i C z \alpha} \right)}{F_{max} + \frac{1}{2} \rho S V^2 C z \alpha^2 2 k_i}$$
(6.8)

Nous verrons que c'est la meilleure modélisation de l'incidence optimale de roulage.

Nous constatons que l'optimum dynamique est bien une moyenne pondérée de l'optimum propulsif $\alpha_r = \mu_r$ et l'optimum aérodynamique $\alpha_r = \alpha_0 + \frac{\mu_r}{2k_iCz\alpha}$.

Cet optimum étant établi à partir du modèle simple de longueur de piste à accélération constante Γ ($V=0.7V_R$), la poussée maximale des moteurs F_{max} doit logiquement être considérée à la vitesse $0.7V_R$. Dans le paragraphe suivant, nous verrons qu'en fait, il est plus judicieux de considérer F_{max} ($V=0.74V_R$) afin d'obtenir de bonnes estimations de l'incidence de roulage au décollage sans panne moteur.

Simulation numérique et modèles d'incidence de roulage optimal

Pour chacune des configurations de becs/volets de l'A300, nous calculons les incidences de roulage optimales données par les modèles précédemment exposés et par une simulation numérique déterminant l'incidence de roulage, supposée constante durant le roulage, correspondant au minimum de longueur de piste au roulage.

Conf.	numéri	timum que (L_{p_r})		optimum Aéro. (\tilde{T})			optimur Propu.(Î		$ \begin{array}{c} \text{optimum} \\ \text{dynamique} \; (\Gamma) \end{array} $					
	AEO	OEI								à 0.7V _B			à V _R	
	α_r	α_r	α_r	$Er_{\%}$	$Er_{\%}$	α_r	$Er_{\%}$	$Er_{\%}$	α_r	$Er_{\%}$	$Er_{\%}$	α_r	$Er_{\%}$	$Er_{\%}$
	(°)	(°)	(°)	AEÕ	OÉĬ	(°)	AEÕ	OÉĬ	(°)	ΑΕΌ	OÉĬ	(°)	ΑΕΌ	OÉĬ
0	-0.3	-0.3	-0.4	-46	-46	0.9	386	386	-0.2	21.7	21.7	-0.3	-12.5	-12.5
1	-0.2	-0.3	-0.4	-119	-46	0.9	530	386	-0.2	11.5	41	-0.3	-52.2	-1.4
2	-4.8	-5.5	-6.4	-34	-17	0.9	118	116	-4.6	4	16.2	-5.5	-13.9	0.6
3	-7	-8.2	-9.8	-41	-20	0.9	112	110	-6.8	3.4	17.5	-8.2	-16.6	0.5
4	-10.4	-12.2	-15	-45	-23	0.9	108	107	-9.9	4.8	18.8	-12.2	-16.9	0.3

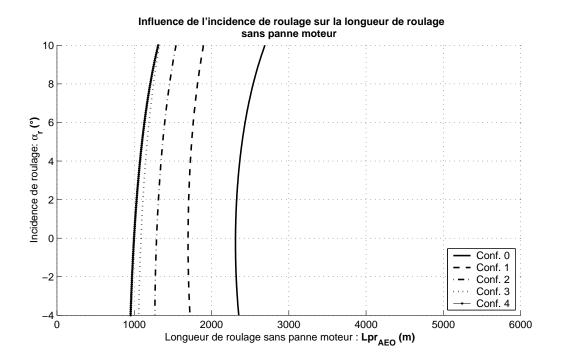
L'incidence de roulage donnée par l'optimum propulsif ne dépend pas de la configuration puisqu'elle ne dépend que du coefficient de frottement pneu/piste. Les estimations de ce modèle ne sont pas bonnes.

Le modèle d'optimum aérodynamique est meilleur que le modèle d'optimum propulsif. Plus les volets sont sortis, plus l'incidence de portance nulle α_0 est important en valeur absolue (Table 6.11, p. 166). Il est donc normal que l'incidence de roulage de l'optimum aérodynamique suive la même variation avec les configurations que l'incidence de portance nulle.

La précision du modèle d'optimum dynamique, qui maximise l'accélération, est la meilleure. Nous avons vu qu'elle était équivalente à minimiser un modèle simple de la longueur de piste au roulage. Ses estimations dépendent de la vitesse choisie pour l'accélération moyenne Γ . Pour la longueur de piste au roulage sans panne moteur, il est préférable de considérer comme vitesse moyenne, $0.74V_R$ (Figure 6.23, p. 186), et non pas la valeur couramment utilisée de $0.7V_R$.

Curieusement, la vitesse moyenne V_R fonctionne mieux que $0.7V_R$, pour la longueur de piste au roulage avec panne moteur. Or, le modèle d'optimum dynamique considère l'accélération moyenne avec la poussée maximale de tous les moteurs, bien qu'en réalité l'un d'entre eux tombe en panne durant le roulage. C'est donc une coı̈ncidence si le modèle d'optimum dynamique fonctionne bien. En fait, l'accélération décroı̂t lorsque la vitesse croı̂t, ce qui fait que l'accélération à $0.7V_R$ est plus grande que celle à V_R . Cela reste cohérent avec le fait que l'accélération sans panne moteur est plus forte qu'avec un moteur de moins! L'estimation de l'optimum dynamique à $0.7V_R$ pour le cas de panne moteur est donc par chance aussi bonne.

Pour mesurer l'importance du choix de l'incidence de roulage α_r lors de la conception avion, nous avons calculé les longueurs de piste au roulage à l'aide de nos modèles (Table 6.3, p. 134), pour différentes incidences de roulage α_r (Figure 6.21, p. 184) (Figure 6.22, p. 185). Ce calcul a été fait à partir d'un avion de type A300, pour chacune de ses



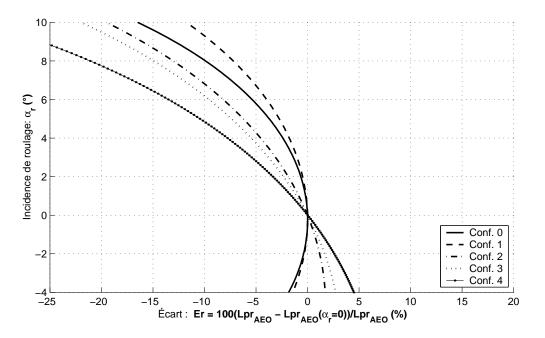
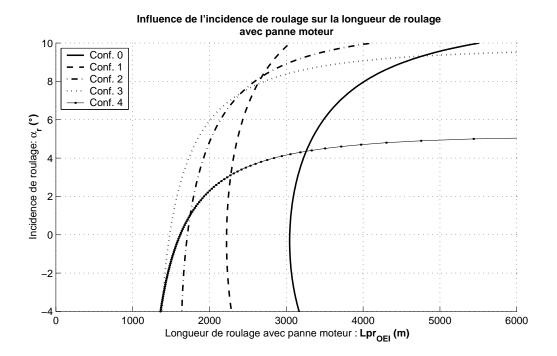


FIG. 6.21 – Évolution des longueurs de piste au roulage sans panne moteur $L_{p_{rAEO}}$, en fonction de l'incidence de roulage α_r , pour les différentes configurations de becs/volets de l'A300.



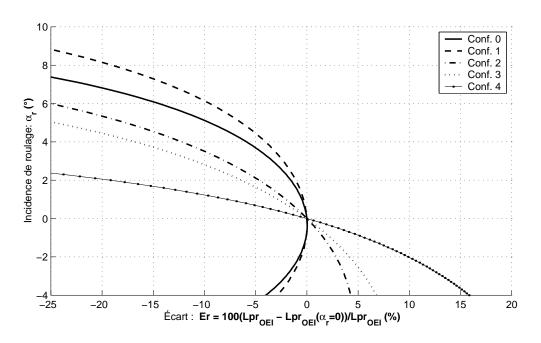
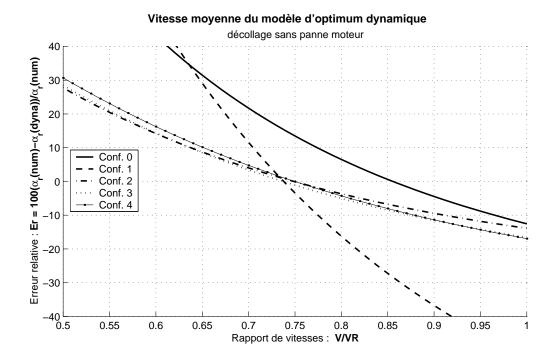


FIG. 6.22 – Évolution des longueurs de piste au roulage avec panne moteur $L_{p_{rOEI}}$, en fonction de l'incidence de roulage α_r , pour les différentes configurations de becs/volets de l'A300.



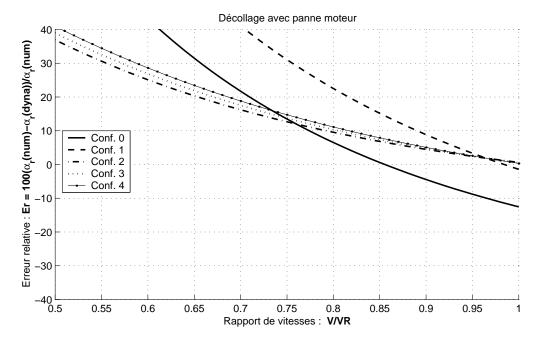


FIG. 6.23 – Erreur d'estimation de l'incidence optimale de roulage par le modèle dynamique, selon la vitesse moyenne à laquelle elle est calculée (Equation 6.8, p. 182).

configurations de becs/volets. La première remarque est que l'incidence de roulage (pour des valeurs plausibles) est peu influente en cas de décollage avec tous les moteurs. Par contre, en cas de panne moteur, elle entraîne plus de conséquences. Nous pouvons noter que pour une incidence de roulage nulle, en cas de roulage avec panne moteur, on retrouve le fait (Table 6.13, p. 168) que la configuration (4) est plus pénalisante que la (3). Ce ne serait pas le cas, si l'incidence de roulage avait été choisie inférieure à -3°. Le choix de l'incidence de roulage doit donc se faire au regard du cas de roulage avec panne moteur (selon la configuration de becs/volets de décollage adoptée).

Conclusion : modèle d'incidence optimale de roulage

Modèle de l'incidence de roulage optimale

$$\alpha_r = \frac{F_{max}(V_{moy}) \mu_r + \frac{1}{2} \rho S V_{moy}^2 C z \alpha^2 2 k_i \left(\alpha_0 + \frac{\mu_r}{2k_i C z \alpha} \right)}{F_{max} + \frac{1}{2} \rho S V_{moy}^2 C z \alpha^2 2 k_i}$$

Mode d'obtention : Analytique, en supposant l'accélération de l'avion constante durant tout le roulage. La valeur de moyenne de la vitesse à considérer V_{moy} a été optimisée pour retrouver la valeur qui minimise la longueur de roulage d'un A300 au décollage.

Domaine de définition : Tout avion au roulage.

Précision: Au décollage sans panne moteur de l'A300, selon les configurations becs/volets: 15% pour la configuration lisse (0), -0.6% pour la configuration de décollage (1), 0.7% pour la conf.(2), -0.2% pour la conf.(3) et 0.9% pour la conf.(4). Au décollage avec panne moteur, les erreurs d'estimations sont de : -12.5% en conf.(0), -1.4% en conf.(1), 0.6% en conf.(2), 0.5% en conf.(3), 0.3% en conf.(4).

Variables:

ones :	
Symboles : Désignation	$\mathbf{Unit\acute{e}s}$
b : Envergure de la voilure c'est-à-dire la distance entre les extrémités des ailes	m
	rad^{-1}
Cz_{α} : Gradient de coefficient de portance avec l'incidence	raa
$F_{max}(0.74V_R)$: Poussée maximale des moteurs correspondante à la vi-	N
tesse de 74% de la vitesse de rotation V_R , et à l'altitude	
de la piste	
k_i : Coefficient de traînée induite $k_i = \frac{1}{\pi \lambda}$	
S: Surface voilure de référence	m^2
V_R : Vitesse de rotation	m/s
α_r : Incidence de roulage	rad
λ : Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$	
μ_r : Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre, sup-	
posée constant durant le roulage	
ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste (à alti-	kg/m^3
tude nulle, $\rho_0 = 1.225 kg/m^3$)	

TAB. 6.15 – Modèle de l'incidence de roulage optimale qui minimise la longueur de roulage

6.10.4 Adaptation de la "Magic Line"

Une modélisation couramment utilisée, appelée "Magic Line" consiste à exprimer la longueur de piste au décollage L_p comme une fonction linéaire de la longueur de piste au roulage L_{p_r} .

$$L_p = aL_{p_r} + b$$

Cette longueur de piste au roulage L_{p_r} est statistiquement considérée proportionnelle au terme $\overline{L_p}_{ml}$:

$$L_{p_r} = k \overline{L_{p_{ml}}}$$

$$\overline{L_{p_{ml}}} = \frac{\frac{m}{S} g}{\frac{\rho}{\rho_0} C z_{max} \frac{F_0}{mg}}$$

Comme le montre J.-L. Boiffier [Boi01a], la grande faiblesse de la "Magic Line" est de ne pas mettre en évidence qu'un avion trop hypersustenté (c'est-à-dire un Cz_{max} élevé), est incapable de décoller en cas de panne moteur (la pente de montée en phase aérienne est insuffisante). Ce fait rend la "Magic Line" critiquable pour une utilisation en phase de conception avion. Cependant, pour les configurations de décollages standards, cette "Magic Line" est réputée donner de bons résultats. Par contre, l'estimation du roulage comme proportionnel à $\overline{L}_{p_{ml}}$ semble une bonne idée.

C'est pourquoi, dans ce paragraphe, nous reprenons la formulation de la "Magic Line" dans le but de l'adapter au roulage (et non pas à la longueur de piste totale, ce qui permettra d'éviter ce problème d'hypersustentation). Cela aura pour conséquence d'obtenir un modèle de roulage très simple, et facile d'utilisation pour une étude de type avant-projet.

Nous commencerons par justifier l'expression du terme $\overline{L_p}_{ml}$, pour ensuite expliciter le coefficient k de proportionnalité entre $\overline{L_p}_{ml}$ et la longueur de piste au roulage L_{p_r} .

Justification du terme $\overline{L_p}_{ml}$

Un modèle simple du roulage consiste à exprimer la longueur de piste au roulage en considérant une accélération moyenne constante Γ_{mov} .

$$\Gamma_{moy} = constante = \frac{dV}{dt}$$

$$V = \Gamma_{moy} t + \underbrace{V(t=0)}_{=0} = \frac{dX}{dt}$$

$$X = \frac{1}{2}\Gamma_{moy} t^2 + \underbrace{X(t=0)}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma_{moy} \frac{V^2}{\Gamma_{moy}^2}$$

$$= \frac{V^2}{2\Gamma_{moy}}$$

$$L_{p_{T}} = X(V_{LOF}) = \frac{V_{LOF}^{2}}{2 \Gamma_{moy}}$$

$$= \frac{\left(\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}\right)^{2} V_{S1}^{2}}{2 \Gamma_{moy}}$$

$$= \left(\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}\right)^{2} \frac{mg}{\frac{1}{2} \rho SCz_{max}} \frac{1}{2 \Gamma_{moy}}$$

$$= \left(\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}\right)^{2} \frac{1}{\rho_{0}} \frac{mg}{\frac{\rho}{\rho_{0}} SCz_{max}} \Gamma_{moy}$$

Au roulage, l'accélération de l'avion est fortement liée à sa propulsion. L'idée est d'assimiler l'accélération moyenne à une proportion du rapport de poussée au point fixe sur la masse avion $\frac{F_0}{m}$. Nous noterons \tilde{k} cette proportion : $\Gamma_{moy} \approx \tilde{k} \frac{F_0}{m}$. À ce terme de propulsion $\frac{F_0}{m}$, se soustrait en réalité de l'expression de l'accélération, un terme dû à la traînée de l'avion et un autre dû au frottement pneu/piste (Equation 6.2, p. 119). Ainsi le coefficient de proportionnalité \tilde{k} sera forcément inférieur à 1.

$$L_{p_r} = \frac{1}{\tilde{k} \rho_0} \left(\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}\right)^2 \frac{mg}{\frac{\rho}{\rho_0} SCz_{max} \frac{F_0}{m}}$$

$$= \frac{1}{\tilde{k} \rho_0 g} \left(\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}\right)^2 \frac{\frac{m}{S} g}{\frac{\rho}{\rho_0} Cz_{max} \frac{F_0}{mg}}$$

$$= \frac{1}{\tilde{k} \rho_0 g} \left(\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}\right)^2 \overline{L_{p_{ml}}}$$

Ainsi, par de simples hypothèses de modélisation du roulage, on retrouve bien l'expression du terme de la "Magic Line" :

$$\overline{L_p}_{ml} = \frac{\frac{m}{S}g}{\frac{\rho}{\rho_0}Cz_{max}\frac{F_0}{mq}}$$

Le facteur de proportionnalité k entre la longueur de piste au roulage L_{p_r} et le terme $\overline{L_{p_m l}}$ est également mis en évidence.

$$k = \frac{L_{p_r}}{\overline{L_{p_{ml}}}} = \frac{1}{\tilde{k} \,\rho_0 g} \left(\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}\right)^2$$

Nous allons maintenant chercher la valeur judicieuse de \tilde{k} à l'aide de nos simulations numériques du décollage (Section 4, p. 83).

Modèle de roulage adapté de la "Magic Line"

À l'aide de simulations numériques de décollage de bimoteurs (Section 4, p. 83), nous allons élaborer un modèle de longueur de piste au roulage L_{p_r} adapté de la "Magic Line". Nous cherchons par la méthode des moindres carrés (fonction "lsqnonlin" de MATLAB), la valeur de \tilde{k} qui minimise l'erreur entre les longueurs de roulage simulées et les longueurs de roulage estimées par :

$$L_{p_r} = \frac{\tilde{k}}{\rho_0 g} \left(\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}\right)^2 \, \overline{L_{p_{ml}}}$$

 kg/m^3

 kg/m^3

Les valeurs déterminées numériquement par nos simulations du rapport des vitesses de décollage et de sustentation $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$, ont été considérées pour déterminer la valeur optimale de \tilde{k} .

Les résultats obtenus sont :

	Sans panne moteur	Avec panne moteur
	(AEO All Engines Operating)	(One Engine Inoperative)
$ ilde{k}$	0.735	0.669
$Er_{moy\%}$	1.84%	2.39%

Modèle de longueur de piste au roulage L_{p_r} adapté de la "Magic Line"

$$L_{p_r} = \frac{1}{\tilde{k} \rho_0 g} \left(\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}\right)^2 \overline{L_{p_{ml}}}$$

$$\overline{L_{p_{ml}}} = \frac{\frac{m}{S} g}{\frac{\rho}{\rho_0} C z_{max} \frac{F_0}{mg}}$$

Mode d'obtention : Identification du coefficient \tilde{k} par la méthode des moindres carrés à partir des simulations (Appendix 4, p. 83) de bimoteurs (valeurs numériques des longueurs de roulage L_{p_r} et du rapport des vitesses $\frac{V_{LOF}}{V_{S1}}$), sur une loi adaptée de la "Magic Line" obtenue analytiquement en supposant une accélération moyenne constante au roulage, proportionnelle à $\frac{F_0}{m}$.

Domaine de définition : Bimoteurs au roulage.

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations de 1.84% pour les roulages sans panne moteur, et 2.39% pour les roulages avec panne moteur à V_1 .

Variables: Symboles : Désignation Unités Cz_{max} : Coefficient de portance maximale (dépend du déploiement des hypersustentateurs) F_0 : Poussée au point fixe (c'est-à-dire poussée maximale à vitesse N et altitude nulles) de tous les moteurs équipant l'avion g: Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \, m/s^2$ m/s^2 \tilde{k} : Coefficient identifié : $\tilde{k}=0.735$ pour le roulage sans panne moteur, $\tilde{k} = 0.669$ pour le roulage avec panne moteur à V_1 L_{p_r} : Longueur de piste parcourue durant le roulage de V=0 à m V_{LOF} . ${\cal S}$: Surface voilure de référence m^2 V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1g (Equation 2.1, p. 32) m/s V_1 : Vitesse de décision (Section 2.2.5, p. 48) m/s V_{LOF} : Vitesse de décollage ou lift-off, vitesse à laquelle l'avion quitte m/sle sol (Section 2.2.7, p. 50) $\frac{V_{LOF}}{V_{-}}$: Rapport des vitesses de décollage et de sustentation. Si vous ne connaissez pas la valeur de ce rapport utilisez notre modèle :

Tab. 6.16 – Modèle de la longueur de piste au roulage L_{p_r} , adapté de la "Magic Line"

 ρ_0 : Masse volumique de l'air à altitude nulle $\rho_0=1.225\;kg/m^3$

 ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste de décollage

(Table 5.5, p. 105) sans panne moteur, (Table 5.6, p. 106)

6.11 Conclusion : Modèle de longueur de piste et temps de roulage

Le calcul du roulage doit se scinder en autant de partie qu'il y a de changement de conditions de roulage (panne moteur, sortie des spoilers, freinage, etc . . .). Pour chacune de ces parties, la distance ΔX_k parcourue sur la piste de cette portion de roulage sera calculée (Table 6.17, p. 192). La longueur de roulage totale L_{prAEO} sera donnée par la somme des longueurs ΔX_k de chacune des portions.

Par exemple pour les quatres cas d'études :

Décomposition des roulages en phases de caractéristiques distinctes

Roulage d'un décollage sans panne moteur (AEO All Engines Operating)

$$L_{p_{rAEO}} = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_R) + L_{p_{r} \circlearrowleft_{AEO}}$$

Roulage d'un décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative)

$$L_{p_{rOEI}} = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \rightarrow V_{R}) + L_{p_{r\circlearrowleft OEI}}$$

Décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off)

$$L_{p_{RTO}} = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \rightarrow V_1) + L_{p_{rRTO}}(V_1 \rightarrow 0)$$

Roulage d'un atterrissage

$$L_{p_r} = L_{p_r \circlearrowleft_{Att}} + L_{p_{rAtt}}$$

il faut calculer les portions de roulage en considérant :

Pour calculer :	considérez (Table 6.17, p. 192) avec :
$L_{p_{rAEO}}$	$F_{ref} = F_0,$ $\Delta Cx_{omoulinet} = 0, \Delta Cx_{oSP} = 0, \Delta Cz_{oSP} = 0, \mu = \mu_r$
$L_{p_{rOEI}}$	$F_{ref} = \frac{N_m - 1}{N_m} F_0, \qquad \Delta C x_{oSP} = 0, \ \Delta C z_{oSP} = 0, \ \mu = \mu_r$
$L_{p_{rRTO}}$	$F_{ref} = \frac{N_m - 1}{N_m} F_{red}, \qquad \mu = \mu_f$
$L_{p_{r\circlearrowleft Att}}$	$F_{ref} = F_{red},$ $\Delta Cx_{omoulinet} = 0, \Delta Cx_{oSP} = 0, \Delta Cz_{oSP} = 0, \mu = \mu_r$
$L_{p_{rAtt}}$	$F_{ref} = F_{red}, \qquad \Delta Cx_{omoulinet} = 0, \qquad \mu = \mu_f$

Modèle d'une portion de roulage ΔX_k parcourue durant un temps Δt , avec vent longitudinal constant $V_w = cte$.

$$\Delta X_k = \frac{1}{2 a} \ln \left(\frac{\Gamma_{\text{recal\'e}f}}{\Gamma_{\text{recal\'e\'e}i}} \right) + V_{\Gamma_{min}} \Delta t + V_w \Delta t$$

Au décollage et à l'atterrissage : $(\Delta > 0)$

$$\Delta t = \frac{1}{a \left(V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus} \right)} \ln \left(\frac{\overline{V_{a,f}}^{\oplus} - 1}{\overline{V_{a,f}}^{\ominus} - 1} \frac{\overline{V_{a,i}}^{\ominus} - 1}{\overline{V_{a,i}}^{\ominus} - 1} \right)$$

Au décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) : $(\Delta < 0)$

$$\Delta t = \frac{signe(a)}{\sqrt{a\Gamma_{min}}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{V_{a,f} - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{a}}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_{a,i} - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{a}}} \right) \right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \overline{V_a}^{\oplus} = \frac{V_a}{V_{\Gamma=0}^{\oplus}} \quad \text{et } \overline{V_a}^{\ominus} = \frac{V_a}{V_{\Gamma=0}^{\ominus}}$$

$$V_{\Gamma=0}^{\ominus} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad V_{\Gamma_{min}} = -\frac{b}{2a}$$

$$V_{\Gamma=0}^{\ominus} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Gamma_{min} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$V_a = V_k - V_w$$

$$\begin{split} \Gamma_{\text{recal\'ee}} &= a \left(\frac{V}{V_{ref}}\right)^2 + b \, \frac{V}{V_{ref}} + c \\ &= 1.56 \, \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) + 2.78 \, \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{ref}) - 4.34 \, \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0.64 \, V_{ref}) \\ &= -2.56 \, \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0) - 1.78 \, \Gamma_{\text{r\'eelle}}(V_{ref}) + 4.34 \, \Gamma_{\text{r\'eelle}}(0.64 V_{ref}) \\ &= C_{\text{r\'eelle}}(0) \end{split}$$

$$\begin{split} \Gamma_{\text{r\'eelle}} &= AV_a^2 + BV_a + C \\ &A = q_2 \, \widetilde{F} - \widetilde{T} & \widetilde{F} = \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \, \left(\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r\right) \\ &B = q_1 \, \widetilde{F} & \widetilde{T} = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \, \left(Cx - \mu \, Cz\right) \\ &C = \widetilde{F} - \widetilde{f}_r & \widetilde{f}_r = \left(\sin \gamma_p + \mu \cos \gamma_p\right) g \\ &Cz = Cz\alpha \, \left(\alpha_r - \alpha_0\right) + \Delta Cz_{oSP} \\ &Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + \Delta Cx_{oSP} + k_i \, Cz^2 \end{split}$$

Mode d'obtention : quasi-analytique. La seule approximation vient du fait que l'accélération réelle de l'avion $\Gamma_{\rm réelle}$ (où le coefficient de frottement pneu/piste varie en fonction de la vitesse) est assimilée à une parabole $\Gamma_{\rm recalée}$ qui coïncide avec l'accélération réelle en trois vitesses : la vitesse initiale de la phase de roulage étudiée, la vitesse finale, une vitesse intermédiaire judicieusement choisie (environ 64% de la vitesse maximale de la phase de roulage).

Domaine de définition : Tout avion au roulage. Le domaine de définition sera restreint par celui du modèle du coefficient de frottement pneu/piste $\mu(V)$ que vous aurez choisi (Appendix A.5, p. 272).

Il faut scinder le roulage en autant de portions qu'il y a de phase où l'avion change de mode de fonctionnement c'est-à-dire dès lors que l'avion sort des spoilers, freine ou a une panne moteur,...

Précision : 0.015% au roulage en roue libre. Au freinage, inférieure à 1% sur les pistes propres et sèches, ou mouillées, ou en herbe et inférieure à 3% sur piste glacée.

Tab. 6.17 – Modèle de roulage avec vent longitudinal constant $V_w = cte$

Chapitre 7

La phase aérienne

7.1	Équations du modèle d'arrondi circulaire et montée rectiligne					
	7.1.1	Caractéristique de l'arc de cercle modélisant l'arrondi? 1				
	7.1.2	Longueur de piste parcourue durant la phase aérienne $L_{p_{\rm air}}$. 1				
		Cas du passage de la hauteur de sécurité durant la montée rectiligne :				
		Cas du passage de la hauteur de sécurité durant l'arrondi : 2				
	7.1.3	Modèle de la phase aérienne : arrondi circulaire et montée rectiligne				
7.2	Ider	γ_{dec} et du facteur de charge n_z 2				
	7.2.1	Valeurs préconisées dans la littérature				
	7.2.2	Détermination des n_z et γ_{dec} optimaux pour chaque simulation 2				
		Choix de la modélisation de la pente de montée rectiligne γ_{dec} 2				
		Calcul du facteur de charge n_z optimal pour une γ_{dec} déterminée				
	7.2.3	Modèles identifiés de n_z et γ_{dec}				
		Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_z adapté aux bimoteurs sans panne moteur (AEO)				
		Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_z adapté aux bimoteurs avec panne moteur (OEI)				
		Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_z adapté aux quadrimoteurs sans panne moteur (AEO)				
		Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_z adapté aux quadrimoteurs avec panne moteur (OEI)				
		Pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage de bimoteurs sans panne moteur (AEO)				
		Pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage de bimoteurs avec panne moteur (OEI)				
		Pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage de quadrimoteurs sans panne moteur (AEO)				
		Pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage de quadrimoteurs avec panne moteur (OEI)				
7.3	Con	nmentaires et résultats du modèle de la phase aérienne 2				
	7.3.1	Confrontation du modèle de phase aérienne et des simulations				

7.3.2	Faiblesse des modèles existants à n_z fixé et γ_{dec} calculée à	
	l'équilibre	226
7.3.3	Explication physique de l'évolution des paramètres	227
	Pourquoi la longueur de piste aérienne $L_{p_{air}}$ augmente-t-elle	
	quand la charge alaire $\frac{m}{S}$ augmente?	227
	Pourquoi la longueur de piste aérienne $L_{p_{\text{air}}}$ diminue-t-elle	
	quand la finesse f augmente?	228
	Pourquoi la longueur de piste aérienne $L_{p_{air}}$ diminue-t-elle	
	quand le taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ augmente?	229

Dans le chapitre précédent, un modèle de longueur de piste au roulage L_{p_r} a été développé. Afin d'obtenir un modèle analytique complet de longueur de piste L_p au décollage/atterrissage, ce chapitre sera consacré à l'élaboration d'un modèle de longueur de piste de la phase aérienne $L_{p_{\rm air}}$.

$$L_p = L_{p_r} + L_{p_{\text{air}}}$$

Pour le décollage, la longueur de la phase aérienne $L_{p_{\rm air}}$ est la distance de piste parcourue entre le point de dernier contact du train de l'avion avec le sol, c'est-à-dire à la vitesse lift-off V_{LOF} , et le point au dessus duquel l'avion passe la hauteur de sécurité réglementaire h_s (FAR 25.113 : 35 ft pour une piste sèche, 15 ft pour une piste mouillée).

Pour l'atterrissage, c'est la distance parcourue entre le passage de la hauteur de sécurité h_s (FAR 25.125 : 50 ft), et le toucher des roues sur la piste à V_{TD} (touch down).

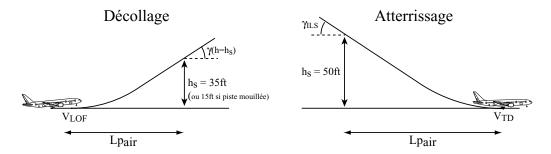


FIG. 7.1 – Phase aérienne : au décollage entre la vitesse lift-off V_{LOF} et le passage de la hauteur de sécurité $h_s = 35 ft$, à l'atterrissage entre le passage de la hauteur de sécurité $h_s = 50 ft$ et la vitesse de toucher des roues V_{TD} .

Une modélisation de la phase aérienne qui est souvent utilisée [Vin93, Nic84, MB92, Boi01a], consiste à assimiler la trajectoire de l'avion à un arc de cercle appelé arrondi, suivi éventuellement d'une montée rectiligne de pente γ_{dec} .

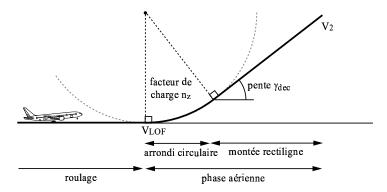


FIG. 7.2 – Phase aérienne modélisée par un arrondi circulaire de facteur de charge n_z , et d'une montée rectiligne de pente γ_{dec} .

Ce modèle ne donne pas seulement la longueur de piste parcourue durant la phase aérienne $L_{p_{\rm air}}$ mais a également l'avantage de respecter la physique de la trajectoire de l'avion, notamment en respectant une tangente de la trajectoire nulle à V_{LOF} (ou V_{TD}

pour l'atterrissage). Nous allons reprendre ce type de modélisation pour élaborer notre propre modèle.

Nous verrons que la phase aérienne est entièrement caractérisée par le facteur de charge à l'arrondi n_z , la pente de montée rectiligne γ_{dec} , et la vitesse de sécurité au décollage V_2 . Nous démontrerons (Equation 7.1, p. 200) et (Equation 7.2, p. 201) que l'expression de la longueur de piste de la phase aérienne $L_{p_{\rm air}}$ est une fonction de ces trois variables.

$$L_{p_{\rm air}} = \begin{cases} \frac{V_2^2}{(nz - \cos\gamma_{dec})g} \tan\frac{\gamma_{dec}}{2} + \frac{h_s}{\tan\gamma_{dec}} & \text{Passage de h_s durant la montée rectiligne} \\ \sqrt{h_s} \sqrt{\frac{2V_2^2}{(nz - \cos\gamma_{dec})g} - h_s} & \text{Passage de h_s durant l'arrondi} \end{cases}$$

La vitesse de sécurité au décollage V_2 doit être atteinte avant le passage de la hauteur de sécurité h_s (cf. FAR 25.111.c(2)), c'est-à-dire atteinte durant la phase aérienne. Son expression est imposée (Table 2.6, p. 59). Notre travail consiste à proposer des modèles du facteur de charge à l'arrondi n_z et de la pente de montée rectiligne γ_{dec} .

Pour élaborer ces modèles, nous nous baserons sur des simulations numériques (Section 4, p. 83) du décollage qui supposent une loi de pilotage en assiette, représentative des directives de pilotage d'AirFrance.

Contrairement à ce qui est fait dans la littérature, pour le décollage, nous ne choisirons pas la pente de la montée rectiligne γ_{dec} du modèle, par des considérations d'équilibre. Nous allons d'ailleurs voir, grâce aux simulations numériques, que le fait de choisir la pente à l'équilibre entraîne des erreurs importantes et une modélisation absurde de l'arrondi (arc de cercle inversé). Cela est dû à la dynamique de la phase aérienne du décollage : les modes longitudinaux de l'avion sont sollicités de telle sorte que l'avion n'a pas encore atteint son état d'équilibre au passage de la hauteur de sécurité h_s . À cette hauteur, la vitesse de l'avion est supérieure à la vitesse de sécurité au décollage V_2 et sa pente $\gamma_{(h=h_s)}$ est bien éloignée de la pente d'équilibre en montée V_2 0.

La pente de montée rectiligne de notre modèle de phase aérienne γ_{dec} sera, dans la majorité des cas, considérée égale à la pente réelle $\gamma_{(h=h_s)}$ au passage de la hauteur de sécurité. Le modèle différera de la pente réelle au passage de la hauteur de sécurité pour quelques cas atypiques de décollage dont nous discuterons (Section 7.2.2, p. 204).

Dans ce chapitre, nous établirons d'abord l'expression de la longueur de piste aérienne en fonction du facteur de charge à l'arrondi et la pente de montée rectiligne. Nous élaborerons ensuite des modèles de la pente de montée rectiligne γ_{dec} et le facteur de charge n_z , identifié sur nos simulations numériques de décollage (Appendix 4, p. 83), et fonction du taux de propulsion avion $\frac{F_0}{mg}$, de la charge alaire $\frac{m}{S}$, et de la finesse f. Enfin, nous comparerons et commenterons les prédictions du modèle de phase aérienne ainsi obtenu, avec les simulations numériques.

7.1 Équations du modèle d'arrondi circulaire et montée rectiligne

La trajectoire aérienne de l'avion durant le décollage commence par une trajectoire courbe appelée arrondi, que nous modéliserons par un arc de cercle, et se termine par

 $^{^1}$ C'est la pente qui serait obtenue (Appendix B.1, p. 300), avec ou sans panne moteur selon le cas de décollage étudiée, si l'avion atteignait l'équilibre avec le train sorti, en maintenant l'assiette de montée θ_2 . En pratique, cet équilibre n'a pas le temps d'être atteint, ni avant le passage de la hauteur de sécurité pour des raisons de dynamique, ni après puisque le pilote commande la rentrée du train ce qui modifie l'état d'équilibre vers lequel l'avion tend.

une montée rectiligne. La longueur de piste parcourue durant la phase aérienne $L_{p_{\text{air}}}$ est la somme des longueurs de piste parcourues durant l'arrondi $L_{p_{ar}}$ et la montée rectiligne $L_{p_{,,}}$.

$$L_{p_{\text{air}}} = L_{p_{ar}} + L_{p_{\nearrow}}$$

Il se peut que la phase de montée rectiligne soit occultée si le passage de la hauteur de sécurité h_s se fait durant l'arrondi.

Les caractéristiques de l'arc de cercle choisi pour modéliser l'arrondi seront d'abord exposées de manière à pouvoir ensuite poser les équations du modèle de phase aérienne du décollage.

7.1.1 Caractéristique de l'arc de cercle modélisant l'arrondi?

L'arc de cercle qui est utilisé pour modéliser l'arrondi durant le décollage (ou l'atterrissage), est choisi pour être tangent à la piste à l'endroit où l'avion quitte le sol (ou touche le sol), c'est-à-dire à la vitesse de décollage lift-off V_{LOF} (ou à la vitesse de toucher des roues V_{TD}). Par conséquent, le centre du cercle se situe sur la perpendiculaire à la piste passant par le point où l'avion atteint V_{LOF} (ou V_{TD}). Son rayon R est déterminé par le facteur de charge vertical (dans les axes aérodynamiques) supportée durant la transition.

$$\begin{array}{rcl} n_z & = & \cos{(\gamma_-\gamma_p)} + \frac{V\dot{\gamma}}{g} \\ \\ & = & \cos{(\gamma_-\gamma_p)} + \frac{V^2}{Rg} \\ \\ \text{d'où}: R & = & \frac{V^2}{(n_z - \cos{(\gamma_-\gamma_p)})\,g} \end{array}$$

À la fin de l'arrondi, lorsque la pente est égale à la pente de la montée rectiligne γ_{dec} , la vitesse n'est en pratique pas égale à la vitesse de sécurité au décollage V_2 . C'est cependant cette vitesse qui a été choisie pour la modélisation parce que, non seulement cette vitesse sert souvent de référence dans la littérature, mais elle a également l'avantage d'être facilement accessible analytiquement (Table 2.6, p. 59), et on sait que cette vitesse est forcément atteinte avant le passage de la hauteur de sécurité (exigence de la norme FAR 25.111.c(2)). La différence avec la vitesse réelle de fin d'arrondi se répercutera simplement sur la modélisation du facteur de charge n_z afin de donner le bon rayon d'arrondi R.

Pour la pente de montée γ_{dec} à la vitesse V_2 , le rayon d'arrondi R s'exprime par :

$$R = \frac{{V_2}^2}{\left(n_z - \cos\left(\gamma_{dec} - \gamma_p\right)\right)g}$$

Le facteur de charge n_z et la pente finale au décollage γ_{dec} sont supposés connus; leurs expressions seront données par la suite (Section 7.2, p. 203).

Pour l'atterrissage, on choisira la vitesse et la pente d'approche (la pente normalisée de l'ILS étant de -3°).

La modélisation de la trajectoire circulaire de l'arrondi s'arrête lorsque l'avion a atteint la pente finale de décollage γ_{dec} ou lorsque l'avion passe la hauteur de sécurité h_s .

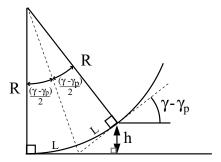


FIG. 7.3 – Le triangle rectangle de côté R et L vérifie la relation géométrique : $\tan\left(\frac{\gamma-\gamma_p}{2}\right)=\frac{L}{R}$. De même, dans le triangle rectangle de côté h et L permet d'écrire : $\sin\left(\gamma-\gamma_p\right)=\frac{h}{L}$. Ainsi, l'altitude h de l'avion dont la trajectoire est circulaire s'exprime par : $h=R\sin\left(\gamma-\gamma_p\right)\tan\left(\frac{\gamma-\gamma_p}{2}\right)=2R\sin^2\frac{\gamma-\gamma_p}{2}$

REMARQUE 7.1 En tout point de l'arc de cercle, la hauteur entre l'avion et la piste peut s'exprimer par relations géométriques, en fonction de la pente γ atteinte par l'avion (Figure 7.3, p. 198).

$$h = R \sin(\gamma - \gamma_p) \tan\left(\frac{\gamma - \gamma_p}{2}\right) = 2R \sin^2\frac{\gamma - \gamma_p}{2}$$

7.1.2 Longueur de piste parcourue durant la phase aérienne $L_{p_{air}}$

Deux cas de figure sont envisageables : soit l'arrondi s'arrête dès que la pente de montée γ_{dec} est atteinte (Figure 7.4, p. 198) à l'altitude $h_{dec} = 2R \sin^2 \frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2} \le h_s$ soit l'avion passe la hauteur de sécurité durant l'arrondi $h_{dec} \ge h_s$ et le modèle ne comporte pas de montée rectiligne (Figure 7.5, p. 200).

Cas du passage de la hauteur de sécurité durant la montée rectiligne :

Passage de la hauteur de sécurité hs durant la phase rectiligne (hdec<hs):

R Ydee-Yp

harrondi montée rectiligne
circulaire

roulage phase aérienne

Fig. 7.4 – Modélisation de la phase aérienne sous forme d'un arrondi circulaire et d'une phase rectiligne

Considérons le premier cas $h_{dec} \leq h_s$. La longueur de piste parcourue durant l'arrondi $L_{p_{ar}}$, peut s'exprimer en fonction du rayon du cercle R et de la pente finale γ_{dec} .

$$\begin{array}{rcl} L_{p_{ar}} & = & \int_{0}^{t_{p_{tr}}} \vec{V}.\overrightarrow{x}_{p}dt \\ & = & \int_{0}^{t_{p_{tr}}} V\cos\left(\gamma-\gamma_{p}\right)\,dt \\ \\ \text{Or,} \quad V & = & R\,\dot{\gamma} \qquad \text{d'après l'hypothèse de la trajectoire circulaire} \\ L_{p_{ar}} & = & R\int_{\gamma_{p}}^{\gamma_{dec}}\cos\left(\gamma-\gamma_{p}\right)\,d\gamma \end{array}$$

$$L_{p_{ar}} = R \sin (\gamma_{dec} - \gamma_p) \qquad (si \, h_{dec} \le h_s)$$

La longueur de piste parcourue durant la phase rectiligne, depuis la hauteur de fin d'arrondi h_{dec} jusqu'à la hauteur de sécurité h_s , s'exprime par :

$$L_{p} = \frac{h_s - h_{dec}}{\tan\left(\gamma_{dec} - \gamma_p\right)} \qquad (si \ h_{dec} \le h_s)$$

La hauteur de fin d'arrondi h_{dec} étant elle même fonction de la pente finale au décollage γ_{dec} (Figure 7.3, p. 198), $h_{dec}=R\sin\left(\gamma_{dec}-\gamma_p\right)\tan\left(\frac{\gamma_{dec}-\gamma_p}{2}\right)$, la longueur de montée rectiligne devient :

$$L_{p} = \frac{h_s}{\tan(\gamma_{dec} - \gamma_p)} - R \frac{\sin(\gamma_{dec} - \gamma_p)}{\tan(\gamma_{dec} - \gamma_p)} \frac{2\sin(\frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2})\cos(\frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2})}{2\cos^2(\frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2})}$$

$$= \frac{h_s}{\tan(\gamma_{dec} - \gamma_p)} - R \frac{\sin(\gamma_{dec} - \gamma_p)}{\tan(\gamma_{dec} - \gamma_p)} \frac{\sin(\gamma_{dec} - \gamma_p)}{1 + \cos(\gamma_{dec} - \gamma_p)}$$

$$= \frac{h_s}{\tan(\gamma_{dec} - \gamma_p)} - R\sin(\gamma_{dec} - \gamma_p) \frac{\cos(\gamma_{dec} - \gamma_p)}{1 + \cos(\gamma_{dec} - \gamma_p)}$$

La longueur de piste par courue durant la phase aérienne $L_{p_{\text{air}}}$ est la somme des longueurs de piste par courues durant l'arrondi $L_{p_{ar}}$ et la montée rectiligne $L_{p_{\nearrow}}$.

$$\begin{split} L_{p_{\text{air}}} &= L_{p_{ar}} + L_{p_{\nearrow}} \\ &= R \sin \left(\gamma_{dec} - \gamma_p \right) \, \left(1 - \frac{\cos \left(\gamma_{dec} - \gamma_p \right)}{1 + \cos \left(\gamma_{dec} - \gamma_p \right)} \right) + \frac{h_s}{\tan \left(\gamma_{dec} - \gamma_p \right)} \\ &= R \, \left(\frac{\sin \left(\gamma_{dec} - \gamma_p \right)}{1 + \cos \left(\gamma_{dec} - \gamma_p \right)} \right) + \frac{h_s}{\tan \left(\gamma_{dec} - \gamma_p \right)} \\ &= R \, \frac{2 \sin \left(\frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2} \right)}{2 \cos^2 \left(\frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2} \right)} + \frac{h_s}{\tan \left(\gamma_{dec} - \gamma_p \right)} \end{split}$$

$$L_{p_{\text{air}}} = R \tan\left(\frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2}\right) + \frac{h_s}{\tan\left(\gamma_{dec} - \gamma_p\right)}$$
 (si $h_{dec} \le h_s$)

L'expression de la longueur de piste aérienne $L_{p_{\rm air}}$ est entièrement caractérisée par le facteur de charge à l'arrondi n_z , la pente de montée rectiligne γ_{dec} et la vitesse de sécurité au décollage V_2 :

$$L_{p_{\text{air}}} = \frac{V_2^2}{(n_z - \cos(\gamma_{dec} - \gamma_p))} \frac{1}{g} \tan \frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2} + \frac{h_s}{\tan(\gamma_{dec} - \gamma_p)}$$
(7.1)

Cas du passage de la hauteur de sécurité durant l'arrondi :

Passage de la hauteur de sécurité h_s durant la phase circulaire (h_{dec}>h_s) :

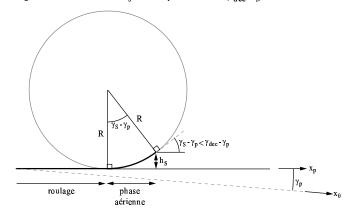


Fig. 7.5 – Modélisation de la phase aérienne sous forme d'un arrondi circulaire

Considérons maintenant le deuxième cas de figure $h_{dec} \geq h_s$, c'est-à-dire que la hauteur de sécurité h_s est passée durant l'arrondi. La distance de montée rectiligne est donc nulle :

$$L_{p_{\nearrow}} = 0 \qquad (si \ h_{dec} \ge h_s)$$

La distance de l'arrondi est donnée par

$$L_{p_{ar}} = R \sin (\gamma_s - \gamma_p) \qquad (si \ h_{dec} \ge h_s)$$

avec γ_s la pente correspondante au passage de la hauteur de sécurité h_s :

$$\gamma_s = \gamma_p + 2\arcsin\left(\frac{h_s}{2R}\right)$$

La longueur de la phase aérienne s'écrit :

$$\begin{split} L_{p_{\text{air}}} &= L_{p_{ar}} &= R \sin \left(\gamma_s - \gamma_p \right) \\ &= 2R \sin \left(\frac{\gamma_s - \gamma_p}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma_s - \gamma_p}{2} \right) \\ &= 2R \sin \left(\arcsin \left(\frac{h_s}{2R} \right) \right) \cos \left(\arcsin \left(\frac{h_s}{2R} \right) \right) \\ &= 2R \sqrt{\frac{h_s}{2R}} \sqrt{1 - \frac{h_s}{2R}} \end{split}$$

$$L_{p_{\rm air}} = \sqrt{h_s} \sqrt{2R - h_s} \qquad \qquad (si \; h_{dec} \geq h_s)$$

Remarque 7.2 En remarquant que le rayon de courbure R est de l'ordre de plusieurs kilomètres alors que la hauteur de sécurité h_s est de l'ordre de quelques mètres (10.7 m au décollage sur piste sèche), $h_s << 2R$, la longueur de la phase aérienne peut se simplifier par :

$$L_{p_{\rm air}} \approx \sqrt{2Rh_s}$$

L'expression de la longueur de piste aérienne $L_{p_{\rm air}}$ est entièrement caractérisée par le facteur de charge à l'arrondi n_z , la pente de montée rectiligne γ_{dec} et la vitesse de sécurité au décollage V_2 :

$$L_{p_{\text{air}}} = \sqrt{h_s} \sqrt{\frac{2V_2^2}{(n_z - \cos(\gamma_{dec} - \gamma_p)) g} - h_s}$$

$$(7.2)$$

7.1.3 Modèle de la phase aérienne : arrondi circulaire et montée rectiligne

Modèle de la phase aérienne du décollage/atterrissage sous forme d'arrondi circulaire et de montée rectiligne.

$$R = \frac{V_2^2}{(n_z - \cos(\gamma_{dec} - \gamma_p)) g}$$

$$h_{dec} = 2R \sin^2 \frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2}$$

Cas du passage de la hauteur de sécurité durant la montée rectiligne $(h_{dec} \leq h_s)$:

$$L_{p_{\text{air}}} = R \tan\left(\frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2}\right) + \frac{h_s}{\tan\left(\gamma_{dec} - \gamma_p\right)}$$

Cas du passage de la hauteur de sécurité durant l'arrondi $(h_{dec} \ge h_s)$:

$$L_{p_{\rm air}} = \sqrt{h_s} \sqrt{2R - h_s}$$

Mode d'obtention : analytique, en supposant la trajectoire de l'avion durant la phase aérienne du décollage/atterrissage sous forme d'arrondi circulaire et de montée rectiligne.

Domaine de définition : avions de transport civil. Les modèles de facteur de charge nz ((Table 7.2, p. 210) en AEO, (Table 7.3, p. 212) en OEI pour les bimoteurs, et (Table 7.4, p. 214) en AEO et (Table 7.5, p. 216) en OEI pour les quadrimoteurs) et de pente de montée rectiligne γ_{dec} ((Table 7.6, p. 219) en AEO, (Table 7.7, p. 221) en OEI pour des bimoteurs, et (Table 7.8, p. 223) en AEO, (Table 7.9, p. 225) en OEI pour des quadrimoteurs) sont donnés pour des taux de propulsion $0.27 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.38$ (0.2 à 0.3 pour les quadrimoteurs), des charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et des finesses en croisière $12 \le f \le 20$.)

Précision: Une erreur relative moyenne (Section 7.3, p. 226) par rapport aux simulations des bimoteurs, de 0.16% pour les longueurs de phase aérienne de décollage sans panne moteur (AEO), et de 0.49% pour celle de décollage avec panne moteur (OEI).

Variables: Symboles: Désignation Unités g: Constante de gravité terrestre $g\approx 9.81\,m/s^2$ h_s : Hauteur de sécurité. C'est au passage de cette hauteur que le calmcul de la longueur de piste s'arrête. Au décollage (cf.FAR 25.113), $h_s = 35ft = 10.7m$ sur piste sèche et $h_s = 15ft = 4.6m$ sur piste mouillée, et à l'atterrissage (cf. FAR 25.125), $h_s = 50 ft = 15.2 m$. $L_{p_{\mbox{\scriptsize air}}}:$ Longueur de piste parcourue durant la phase aérienne du décollage/atterrissage nz: Facteur de charge de l'arrondi (Section 7.2, p. 203) ${\cal R}$: Rayon de l'arc de cercle modélisant l'arrondi m V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Section 2.2.9, p. 56) m/ γ_{dec} : Pente de montée rectiligne au décollage (Section 7.2, p. 203), ou de descente rectiligne pour l'atterrissage $\gamma_{dec} = \gamma_{ILS} = -3^{\circ}$ γ_p : Pente de la piste rac

Tab. 7.1 – Modèle de la longueur de piste parcourue durant la phase aérienne du décollage/atterrissage $L_{p_{\rm air}}$.

7.2 Identification de la pente γ_{dec} et du facteur de charge n_z

Les valeurs couramment utilisées dans la littérature du facteur de charge de l'arrondi nz et de la pente de montée rectiligne γ_{dec} du modèle de la phase aérienne du décollage seront d'abord rappelées dans cette section. Nous verrons alors que la pente couramment utilisée, calculée par les équations d'équilibre, n'est pas un choix judicieux. C'est pourquoi, nous nous proposons d'élaborer nos propres modèles de γ_{dec} et nz.

7.2.1 Valeurs préconisées dans la littérature

Les ouvrages qui utilisent le modèle d'arrondi circulaire et de montée rectiligne [Vin93, Nic84, MB92, Boi01a], préconisent une valeur moyenne donnée, pour l'ensemble des avions, du facteur de charge n_z durant l'arrondi, et une pente de montée rectiligne calculée analytiquement en supposant que l'avion a atteint l'équilibre.

E.Torenbeek [Tor86] indique que l'augmentation du coefficient de portance $\frac{\Delta Cz}{Cz}$ pendant l'arrondi est de l'ordre de 0 à 0.05 avec panne moteur, et 0.10 à 0.15 sans panne moteur. Cela revient [Boi01a] a des facteurs de charges durant l'arrondi de :

$$\begin{array}{rcl} mg &=& \frac{1}{2}\rho SV^2Cz & \text{ en vol rectiligne \'equilibr\'e} \\ nzmg &=& \frac{1}{2}\rho SV^2(Cz+\Delta Cz) & \text{ pendant l'arrondi sous facteur de charge } nz \\ & \text{ En supposant la m\'eme vitesse } V \\ nz &=& 1+\frac{\Delta Cz}{Cz} \\ &=& \begin{cases} 1 \text{ à } 1.05 & \text{ Avec panne moteur (OEI : One Engine Inoperative),} \\ 1.10 \text{ à } 1.15 & \text{ Sans panne moteur (AEO : All Engines Operating).} \end{cases}$$

Le facteur de charge considéré pour le calcul du décollage d'un avion de type A300, en exercice à SupAéro[Boi01b], est de l'ordre de $n_z = 1.1$, et la pente de montée rectiligne est calculée avec les équations d'équilibre pour une vitesse V_{LOF} .

Pour Leland M. Nicolai [Nic84], l'arrondi et la montée se font à vitesse constante (que je suppose assimilée égale à V_2 , car considérer V_{LOF} ne permettrait pas à l'avion d'être certifié FAR 25.111.c(2) puisqu'au passage de la hauteur de sécurité, la vitesse doit être au moins de V_2 .) La pente de montée rectiligne est calculée pour cette vitesse, à l'aide des équations d'équilibre de la mécanique du vol. Le facteur de charge considéré est de $n_2 = 1.15$.

Pour Nguyen X. Vinh [Vin93], la pente de montée rectiligne est calculée en supposant l'avion en équilibre à la vitesse V_2 . Le facteur de charge est pris égal à $n_z = 1.15$.

J.Rosay [Ros05], indique que l'ordre de grandeur du facteur de charge durant l'arrondi avec panne moteur est de l'ordre de $n_z = 1.05$.

Nous allons voir qu'autant ces valeurs de n_z ne sont pas absurdes, autant le choix d'un calcul à l'équilibre, de la pente de montée rectiligne γ_{dec} n'est pas judicieux.

7.2.2 Détermination des n_z et γ_{dec} optimaux pour chaque simulation

Afin de trouver une loi qui modélise la pente γ_{dec} et le facteur de charge nz, il faut d'abord déterminer les valeurs optimales de ces paramètres pour chacune des simulations numériques effectuées (Section 4, p. 83). Ce paragraphe a pour but d'expliquer le choix de ce que l'on appelle "valeurs optimales". Le modèle de la phase aérienne sous forme d'arrondi circulaire et de montée rectiligne, est fonction de deux paramètres : le facteur de charge nz et la pente γ_{dec} . Pour une modélisation de pente γ_{dec} choisie, il n'y a qu'un seul facteur de charge nz permettant au modèle de phase aérienne de retrouver le résultat exacte de la longueur de piste aérienne $L_{p_{\rm air}}$ de chaque simulation numérique. Ainsi, nous allons d'abord justifier le choix de la modélisation de γ_{dec} que nous allons adopter, et ensuite nous exposerons comment le facteur de charge nz est déterminée une fois la γ_{dec} choisie.

Choix de la modélisation de la pente de montée rectiligne γ_{dec}

La pente de montée rectiligne γ_{dec} est la pente de la droite modélisant la trajectoire de l'avion entre l'arrondi et le passage de la hauteur de sécurité h_s . La littérature préconise d'évaluer cette pente en reprenant les équations de la dynamique du vol à l'équilibre (souvent considéré à la vitesse de sécurité V_2). Une telle démarche n'est en réalité pas fiable.

La pente γ_{dec} ne peut pas se déduire d'un calcul à l'équilibre : En effet, lorsque la pente à l'équilibre est considérée, le modèle de phase aérienne ap-

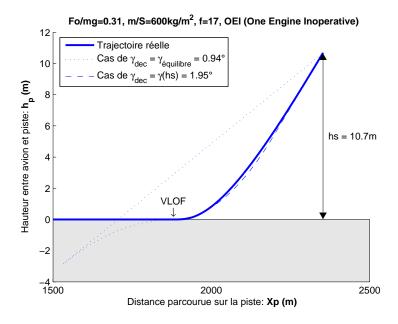


Fig. 7.6 – Essais de différentes pentes de montée rectiligne γ_{dec} pour le modèle de phase aérienne

pliquée aux simulations numériques (Section 4, p. 83) aboutit à des trajectoires quelque peu différentes de la trajectoire réelle, et le modèle se montre parfois même absurde

physiquement (Figure 7.6, p. 204) avec un arc de cercle inversé pour l'arrondi (rayon R négatif!). Cela est principalement dû au fait que l'avion n'a pas eu le temps d'atteindre son état d'équilibre au passage de la hauteur de sécurité, et que la dynamique implique une pente réelle de l'avion au passage de cette hauteur h_s bien différente de celle à l'équilibre. Pour le cas de panne moteur OEI (One Engine Inoperative) montré (Figure 7.6, p. 204), la pente d'équilibre est bien inférieure à la pente réelle au passage de la hauteur de sécurité. Considérer la pente de montée rectiligne du modèle γ_{dec} égale à la pente d'équilibre entraîne une modélisation de la trajectoire aberrante.

Calculer la pente du modèle de montée rectiligne γ_{dec} par des considérations d'équilibre n'est donc pas judicieux.

Autant il est facile de déterminer de manière analytique une pente d'équilibre, autant il n'est pas possible d'avoir une expression analytique d'une pente dynamique. Il nous faudra donc élaborer un modèle de la pente de montée rectiligne γ_{dec} par identification sur les simulations numériques.

La pente γ_{dec} considérée égale à la pente $\gamma(h_s)$:

Quel pente dynamique considérer? À ce stade, il est tentant de considérer pour la pente de montée rectiligne γ_{dec} du modèle, la pente réelle au passage de la hauteur de sécurité $\gamma(h_s)$. Il se trouve justement que cette pente est numériquement assez proche de la pente optimale pour la plupart des simulations : cette pente permet de minimiser l'écart moyen² entre la trajectoire réelle et celle d'une modélisation d'arrondi circulaire et montée rectiligne.

Écart moyen (%)	AEO	OEI
$si \gamma_{dec} = \gamma(h_s)$	1.83%	1.23%
si $\gamma_{dec} = \gamma_{Opti}$	1.17%	0.59%

L'erreur relative moyenne $\frac{100}{n_{simu}} \sum_{i=1}^{n_{simu}} \left| \frac{\gamma_{Opti} - \gamma(h_s)}{\gamma_{Opti}} \right|$, entre la pente optimale γ_{Opti} qui minimise l'écert de trajectoire et le respectoire et le respectoire

minimise l'écart de trajectoire et la pente réelle de passage de la hauteur de sécurité $\gamma(h_s)$, pour l'ensemble des simulations se modélisant en deux phases (une circulaire et une rectiligne), est de 4.3% sans panne moteur (AEO All Engines Operating) et de 5.61% avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative).

La pente réelle au passage de la hauteur de sécurité $\gamma(h_s)$ étant proche de la pente optimale γ_{Opti} , c'est donc cette pente $\gamma(h_s)$ qui sera considérée pour la pente de montée rectiligne γ_{dec} de notre modèle de phase aérienne. Ce choix a également l'avantage notable de conserver un sens physique à la pente γ_{dec} puisqu'elle correspond à une pente réelle par laquelle l'avion passera au cours de son décollage.

$$Er_{moy\%} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| Er_{\%i} \right|$$

(Avec n, le nombre de points simulés durant la phase aérienne)

L'écart de trajectoire est la différence d'altitude réelle h_p et d'altitude du modèle de phase aérienne $h_{p,model}$, le long de la trajectoire, rapporté à la hauteur de sécurité h_s :

$$Er_{\%} = 100 \frac{h_p - h_{p,model}}{h_s}$$

²Le critère d'erreur relative que j'utilise habituellement n'est pas adapté ici puisque la grandeur à quantifier, la trajectoire avion (représentée par la distance avion/piste h_p), est nulle au début de la phase aérienne. C'est donc un critère d'écart moyen par rapport à la trajectoire qui a été utilisé, et qui consiste à calculer la moyenne des valeurs absolues des écarts de trajectoire.

Cas limites du modèle où γ_{dec} seraient différent de la pente $\gamma(h_s)$: Le modèle de phase aérienne que nous avons choisi impose néanmoins un encadrement

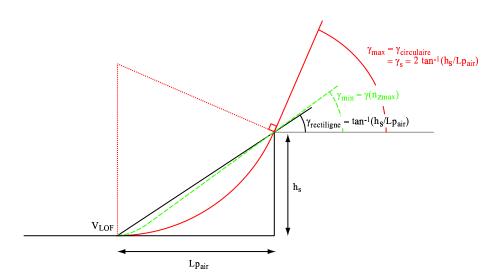


Fig. 7.7 – Le modèle de la phase aérienne sous forme d'arrondi circulaire et de montée rectiligne, impose un encadrement de la pente de la montée rectiligne γ_{dec} . Le minimum est la pente induisant un facteur de charge à l'arrondi maximal admissible, c'est-à-dire une augmentation de Cz maximale. Le maximum est la pente correspondant à une phase aérienne uniquement sous forme d'arrondi circulaire.

de la pente de montée rectiligne γ_{dec} .

Le cas de la pente maximale prise en compte par notre modélisation est donnée pour le cas d'une phase aérienne uniquement circulaire. D'après (Figure 7.3, p. 198), la longueur de piste de la phase aérienne circulaire s'exprime par :

$$\begin{array}{rcl} L_{p_{\rm air}} & = & R \sin \gamma_s = \frac{h_s}{\sin \gamma_s \tan \frac{\gamma_s}{2}} \, \sin \gamma_s = \frac{h_s}{\tan \frac{\gamma_s}{2}} \\ \\ \gamma_s & = & 2 \, \tan^{-1} \frac{h_s}{L_{p_{\rm air}}} \end{array}$$

Pour toutes les pentes au passage de la hauteur de sécurité $\gamma(h_s)$ supérieures à la pente maximale γ_s , correspondant à un modèle aérien uniquement circulaire, le modèle de phase aérienne reste sous forme circulaire et ne dépend plus de γ_{dec} . Cela correspond au cas de la hauteur de sécurité passée durant l'arrondi : $h_{dec} \geq h_s$ (Table 7.1, p. 202). Ainsi pour élaborer un modèle de pente de montée rectiligne γ_{dec} , à chaque fois que les simulations montrent une pente réelle au passage de la hauteur de sécurité $\gamma(h_s)$ supérieure à la pente maximale γ_s du modèle circulaire, la pente γ_{dec} sera considérée égale à γ_s .

REMARQUE 7.3 La tentative d'une autre modélisation de la trajectoire lorsque la pente $\gamma(h_s) > \gamma_s = 2 \tan^{-1} \frac{h_s}{L_{p_{\rm air}}}$ a été envisagée. Il s'agit de modéliser la trajectoire de l'avion sous la forme :

$$h_p = AX^3 + BX^2 + CX + D$$

au lieu d'une trajectoire circulaire. Cette modélisation de la trajectoire doit respecter les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{array}{rcl} h_p(0) & = & 0 \\ h_p(L_{p_{\rm air}}) & = & h_s \\ \dot{h_p}(0) & = & 0 \\ \dot{h_p}(L_{p_{\rm air}}) & = & \tan\gamma(h_s) \end{array}$$

La première équation permet d'écrire que D=0, et la troisième que C=0. Sachant que la dérivée est $\dot{h_p}=3AX^2+2BX+C$, la troisième équation permet de déduire ensuite que $h_s=AL_{p_{\rm air}}^3+BL_{p_{\rm air}}^2$, et de la quatrième équation que $\tan\gamma(h_s)=3AL_{p_{\rm air}}^2+2BL_{p_{\rm air}}$. Ce qui permet de déduire les coefficients $A=\frac{L_{p_{\rm air}}\tan\gamma(h_s)-2h_s}{L_{p_{\rm air}}}$ et $B=\frac{3h_s-L_{p_{\rm air}}\tan\gamma(h_s)}{L_{p_{\rm air}}}$. Ainsi la nouvelle modélisation polynômiale de la trajectoire revient à :

$$h_{p} = \frac{L_{p_{\text{air}}} \tan \gamma(h_{s}) - 2h_{s}}{L_{p_{\text{air}}}^{3}} X^{3} + \frac{3h_{s} - L_{p_{\text{air}}} \tan \gamma(h_{s})}{L_{p_{\text{air}}}^{2}} X^{2}$$

L'écart moyen vis-à-vis de la trajectoire réelle est effectivement meilleure pour cette modélisation polynômiale que pour la modélisation circulaire (Figure 7.8, p. 208), mais le gain est seulement de 0.7% pour l'ensemble des simulations dont la pente $\gamma(h_s) > \gamma_s$. Cela est en partie dû au fait que la modélisation polynômiale doit respecter les conditions aux limites qui contraignent la forme de la modélisation de la trajectoire.

	AEO	OEI
Modélisation circulaire : $Er_{moy\%}$	2.99%	- aucun cas -
Modélisation polynômiale : $Er_{moy\%}$	2.28%	- aucun cas -

De plus, une telle modélisation a le désavantage de compliquer l'expression analytique du modèle de phase aérienne. C'est pourquoi, cette modélisation n'a pas été retenue.

Le cas de la pente minimale pourrait être défini par la limite géométrique du modèle qui, pour les pentes très faibles, est limitée par une modélisation uniquement rectiligne : la pente d'un tel cas est de $\tan^{-1}\frac{h_s}{L_{p_{\rm air}}}$. En fait, une autre limitation intervient avant cette limitation géométrique. Il s'agit des cas où la pente induirait un facteur de charge trop élevé, c'est-à-dire un rayon de l'arrondi $R = \frac{V_2}{(nz-\cos(\gamma_{dec}-\gamma_p))g}$ proche de zéro. Qui dit facteur de charge élevé, dit augmentation de coefficient de portance à l'arrondi élevé : $\frac{\Delta Cz}{Cz} = nz - 1$. La limitation vient du fait que le coefficient de portance en fin d'arrondi ne peut pas excéder le coefficient de portance maximale Cz_{max} sous peine de décrochage. En pratique, aucune de nos simulations numériques n'a buté contre cette limitation minimale.

Calcul du facteur de charge n_z optimal pour une γ_{dec} déterminée

Une fois la pente de montée rectiligne γ_{dec} choisie, pour déterminer quel facteur de charge n_z permet de retrouver la longueur de piste aérienne simulée $L_{p_{\rm air}}$, il suffit de reprendre la modélisation de la phase aérienne (Table 7.1, p. 202) dans le sens inverse.

(AEO, f = 16, $M_{MTOW}/S = 500 \text{kg/m}^2$, $F_0/\text{mg} = 0.35$) Hauteur avion/piste : hp (m) Simulation Modèle circulaire Modèle polynômial 1250 1300 1500 1550 1350 1400 Distance piste: Xp (m) Ecart de trajectoire : Er $Er = 100 \frac{hp(vrai)-hp(modèle)}{}$ 1250 1300 1350 1400 1450 1500 1550 Distance piste: Xp (m)

Modélisation de la phase aérienne

FIG. 7.8 – Cas particulier d'une simulation d'un décollage sans panne moteur (AEO) où la phase aérienne est modélisée uniquement par un arc de cercle : $\gamma(h_s) > \gamma_s$. L'amélioration de la modélisation de la trajectoire par le modèle polynômial, au lieu du circulaire, n'est pas suffisamment conséquente afin de retenir ce modèle malgré sa complexité analytique.

Supposons que la hauteur de sécurité est passée durant la phase de montée rectiligne. Dans ce cas, la longueur de piste aérienne s'exprime par :

$$L_{p_{\rm air}} = R \tan \frac{\gamma_{dec}}{2} + \frac{h_s}{\tan \gamma_{dec}}$$
 Ce qui permet de déduire le rayon de l'arrondi
$$L_{p_{\rm air}} - \frac{h_s}{\tan \gamma_{dec}}$$

$$R = \frac{L_{p_{\text{air}}} - \frac{h_s}{\tan \gamma_{dec}}}{\tan \frac{\gamma_{dec}}{2}}$$

et d'ainsi calculer la hauteur de fin d'arrondi

$$h_{dec} = 2R\sin^2\tan\frac{\gamma_{dec}}{2}$$

Si notre hypothèse était juste alors la hauteur de fin d'arrondi serait inférieure à la hauteur de sécurité $h_{dec} \leq h_s$. Dans le cas contraire, notre hypothèse serait fausse et le passage de la hauteur de sécurité se ferait, en fait, durant l'arrondi dont le rayon serait donné par :

$$L_{p_{
m air}} = \sqrt{h_s} \sqrt{2R - h_s}$$
 d'où $R = \frac{1}{2} \left(\frac{L_{p_{
m air}}^2}{h_s} - h_s \right)$

Le facteur de charge n_z permettant de retrouver, par notre modèle de phase aérienne, la longueur de piste aérienne simulée $L_{p_{\text{air}}}$ est finalement calculée par :

$$nz = \cos \gamma_{dec} + \frac{{V_2}^2}{Rq}$$

208 18 décembre 2006

7.2.3 Modèles identifiés de n_z et γ_{dec}

Dans le paragraphe précédent, a été expliqué la méthode de détermination des valeurs optimales des facteurs de charge n_z et pentes de montée rectiligne γ_{dec} pour chacune des simulations de décollage. Les modélisations quantitatives de ces grandeurs sont exposées dans ce paragraphe. Elles ont été élaborées par identification d'une expression analytique judicieusement choisie (Appendix C, p. 309), par la méthode des moindres carrés³, sur ces valeurs optimales précédemment déterminées à partir des simulations de décollage. Ces simulations numériques (Section 4, p. 83) sont les décollages de 324 bimoteurs fictifs (ou 297 quadrimoteurs fictifs), basé sur un avion de type A300 dont on a fait varier le taux de propulsion, la charge alaire et la finesse. Elles nous ont donc permis d'élaborer des modèles du facteur de charge à l'arrondi n_z et de la pente de montée rectiligne γ_{dec} , en fonction de ces paramètres avions.

Pour chaque modèle, seront présentées l'expression analytique choisie, les valeurs des coefficients identifiés, la précision du modèle par rapport aux valeurs optimales issues des simulations, et une figure montrant l'évolution de nz et γ_{dec} des simulations et de notre modèle en fonction de la finesse en croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ et du taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ pour chaque charge alaire $\frac{m}{S}$.

Les modèles sont scindés en deux cas, correspondant à des comportements au décollage différents, selon que la vitesse de sécurité au décollage V_2 est contrainte⁴ ou non par la vitesse minimale $V_{2min} = 1.13V_{S1}$ (ou $V_{2min} = 1.08V_{S1}$ pour les quadrimoteurs) comme l'impose la FAR 25.107(b/c).

REMARQUE 7.4 Ce n'est pas la pente rectiligne γ_{dec} qui a été modélisée mais le rapport $\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{eq}(\theta_2)}\right)$ qui a d'une part l'avantage d'être sans dimension, et d'autre part présente un comportement plus sain en fonction des paramètres $f, \frac{F_0}{mg}$ et $\frac{m}{S}$, puisque la pente $\gamma_{eq}(\theta_2)$ est la pente qu'atteindrait l'avion s'il avait le temps d'atteindre l'équilibre du décollage en cours. La pente $\gamma_{eq}(\theta_2)$ se calcule analytiquement (Appendix B.1, p. 300).

REMARQUE 7.5 J'ai choisi d'exprimer les modèles de n_z et γ_{dec} en fonction de la finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{C x_o}}$ et non pas en fonction du coefficient de traînée de frottement Cx_o .

Il est bien sûr critiquable de considérer une finesse de *croisière* pour l'élaboration d'un modèle de *décollage*, d'autant plus que le Cx_o en question est celui donnée avec becs/volets sortis ce qui n'est pas le cas en croisière (configuration lisse). Mais la grandeur de la finesse m'a paru plus "parlante" que les valeurs en 10^{-2} des Cx_o , et que par chance, le comportement des lois à identifier était plus simple en fonction de cette finesse que du Cx_o .

Par ailleurs il n'est pas difficile de passer d'une modélisation à l'autre (l'allongement a été considéré constant, celui de l'A300 $\lambda = 7.8$) : $Cx_o = \frac{3}{16} \frac{\pi \lambda}{f^2}$

^aCette finesse correspond [Boi01a] à l'optimum de $\frac{Cz^{1/2}}{Cx}$, qui maximise la distance franchissable d'un avion équipé de réacteurs, effectuant une croisière de Bréguet ou une croisière montante.

³En utilisant la fonction d'optimisation par les moindres carrés de Matlab "lsqnonlin" comme montré (Appendix C, p. 309).

 $^{^4}$ La vitesse de sécurité au décollage V_2 se calcule analytiquement (Table 2.6, p. 59). La plupart des décollages ont une vitesse de sécurité au décollage contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13V_{S1}$ (ou $1.08V_{S1}$ pour les quadrimoteurs); seuls 52 bimoteurs sur les 324 avions simulés (Section 4, p. 83), ne sont pas contraints, c'est-à-dire $V_2 > V_{2min}$.

Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_z adapté aux bimoteurs sans panne moteur (AEO)

Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_{ZAEO} au décollage sans panne moteur pour des bimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13 V_{S1}$

$$nz_{AEO} = \left(K_1 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_2 \frac{m}{S} + K_3\right) \frac{F_0}{mg} + K_4 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_5 \frac{m}{S} + K_6$$

$$K_1 = -2.47 \ 10^{-7}$$
 $K_2 = 2.54 \ 10^{-4}$ $K_3 = -1.52 \ 10^{-4}$ $K_4 = 1.19 \ 10^{-7}$ $K_5 = -9.26 \ 10^{-5}$ $K_6 = 1.189$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$nz_{AEO} = \left(K_{1}\frac{m}{S} + K_{2}\frac{F_{0}}{mg} + K_{3}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{4}\right)f^{2} + \left(K_{5}\frac{m}{S} + K_{6}\frac{F_{0}}{mg} + K_{7}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{8}\right)f + \left(K_{9}\frac{m}{S} + K_{10}\frac{F_{0}}{mg} + K_{11}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{12}\right)$$

Mode d'obtention: identifié par les moindres carrés sur les valeurs optimales (Section 7.2.2, p. 204) issues des simulations de décollage de bimoteurs (Section 4, p. 83). La méthode pour le choix de la structure des fonctions à identifier, ainsi que la méthode d'identification sont détaillées en annexe (Appendix C, p. 309).

Domaine de définition : avions de transport civil. Avions bimoteurs de taux de propulsion $0.27 \leq \frac{F_0}{mg} \leq 0.38$, de charge alaire $500 \leq \frac{m}{S} \leq 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \leq f \leq 20$.

Pour déterminer si la vitesse de sécurité au décollage V_2 est contrainte ou non, il suffit de la calculer à l'aide de (Table 2.6, p. 59).

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.05% pour les décollages contraints en V_{2min} , et de 0.1% pour les décollages non contraints.

Symboles : Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + (\Delta Cx_{omoulinet}) + k_iCz^2$). Il dépend de la configuration le configuration de la configuration de l'avion ($Cx = Cx_o + \Delta Cx_o + \Delta$	_
guration becs/volets. F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de tous les moteurs de l'avion	N
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.27 et 0.38	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{\pi\lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209) g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
m : Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight M_{MTOW} qui a été désignée par m dans ce chapitre pour simplifier les notations dans les équations.	kg
$\frac{m}{S}$: Charge alaire de l'avion. Comprise entre 500 et 700 kg/m^2	kg/m^2
\tilde{n}_z : Facteur de charge de l'arrondi du modèle de phase aérienne du décollage (Table 7.1, p. 202)	_
S : Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale $V_{2min}=1.13V_{S1}$ pour les bimoteurs selon la FAR 25.107(b/c)	m/s
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s

Tab. 7.2 – Modèle du facteur de charge à l'arrondi nz_{AEO} de bimoteurs

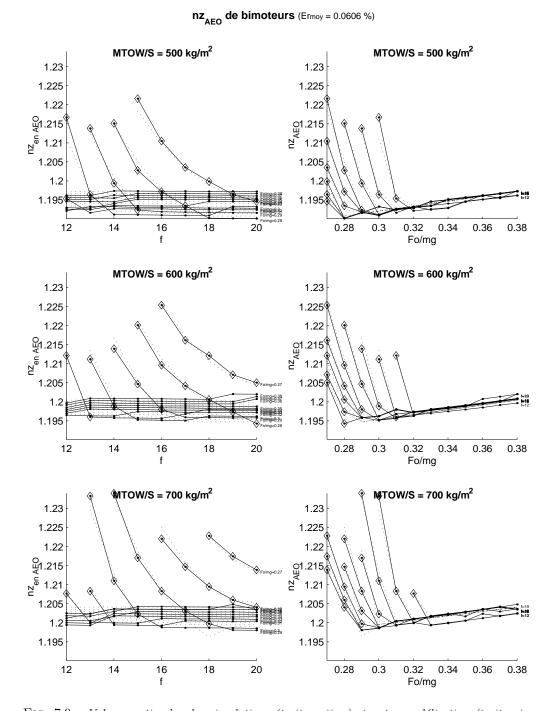


Fig. 7.9 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du facteur de charge à l'arrondi n_z . Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_z adapté aux bimoteurs avec panne moteur (OEI)

Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_{ZOEI} au décollage avec panne moteur pour des bimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13V_{S1}$

$$\begin{split} nz_{OEI} &= \left((K_1 \frac{m}{S} + K_2) f^2 + (K_3 \frac{m}{S} + K_4) f + (K_5 \frac{m}{S} + K_6) \right) \left(\frac{F_0}{mg} \right)^2 \\ &+ \left((K_7 \frac{m}{S} + K_8) f^2 + (K_9 \frac{m}{S} + K_{10}) f + (K_{11} \frac{m}{S} + K_{12}) \right) \frac{F_0}{mg} \\ &+ (K_{13} \frac{m}{S} + K_{14}) f^2 + (K_{15} \frac{m}{S} + K_{16}) f + (K_{17} \frac{m}{S} + K_{18}) \\ K_1 &= -4.33 \, 10^{-6} \quad K_2 &= -6.39 \, 10^{-5} \quad K_3 &= -1.63 \, 10^{-6} \quad K_4 &= -2.62 \, 10^{-5} \quad K_5 &= 2.35 \, 10^{-5} \quad K_6 &= -2.76 \, 10^{-5} \\ K_7 &= 2.59 \, 10^{-6} \quad K_8 &= -2.41 \, 10^{-5} \quad K_9 &= -1.41 \, 10^{-6} \quad K_{10} &= 3.99 \, 10^{-3} \quad K_{11} &= 4.54 \, 10^{-4} \quad K_{12} &= 0.466 \\ K_{13} &= -8.71 \, 10^{-7} \quad K_{14} &= 1.28 \, 10^{-5} \quad K_{15} &= 1.85 \, 10^{-5} \quad K_{16} &= 6.49 \, 10^{-4} \quad K_{17} &= -3.31 \, 10^{-4} \quad K_{18} &= 0.915 \end{split}$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$\begin{array}{ll} nz_{OEI} & = & \left(K_{1}\frac{m}{S} + K_{2}\frac{F_{0}}{mg} + K_{3}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{4}\right)f^{2} + \left(K_{5}\frac{m}{S} + K_{6}\frac{F_{0}}{mg} + K_{7}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{8}\right)f \\ & + \left(K_{9}\frac{m}{S} + K_{10}\frac{F_{0}}{mg} + K_{11}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{12}\right) \\ & K_{1} = -1.97\,10^{-6} \quad K_{2} = -1.34\,10^{-3} \quad K_{3} = 7.56\,10^{-6} \quad K_{4} = 6.09\,10^{-4} \\ & K_{5} = 2.60\,10^{-5} \quad K_{6} = -3.71\,10^{-3} \quad K_{7} = -1.19\,10^{-4} \quad K_{8} = -7.20\,10^{-3} \\ & K_{9} = 1.07\,10^{-4} \quad K_{10} = -6.51\,10^{-3} \quad K_{11} = 2.74\,10^{-6} \quad K_{12} = & 1.122 \end{array}$$

Mode d'obtention: identifié par les moindres carrés sur les valeurs optimales (Section 7.2.2, p. 204) issues des simulations de décollage de bimoteurs (Section 4, p. 83). La méthode pour le choix de la structure des fonctions à identifier, ainsi que la méthode d'identification sont détaillées en annexe (Appendix C, p. 309).

Domaine de définition : avions de transport civil. Avions bimoteurs de taux de propulsion $0.27 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.38$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et de finesse équivalente en croisière 12 < f < 20.

Pour déterminer si la vitesse de sécurité au décollage V_2 est contrainte ou non, il suffit de la calculer à l'aide de (Table 2.6, p. 59).

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.04% (pour les décollages contraints en V_{2min} et pour les décollages non contraints).

Symboles : Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o +$	_
$\Delta Cx_{oTrain} + (\Delta Cx_{omoulinet}) + k_iCz^2$). Il dépend de la confi-	
guration becs/volets.	
F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion: compris entre 0.27 et 0.38	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
${\cal M}_{MTOW}$ qui a été désignée par m dans ce chapitre pour simplifier	
les notations dans les équations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire de l'avion. Comprise entre 500 et 700 kg/m^2	kg/m^2
n_z : Facteur de charge de l'arrondi du modèle de phase aérienne du	_
décollage (Table 7.1, p. 202)	
S : Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale $V_{2min}=1.13V_{S1}$ pour	m/s
les bimoteurs selon la FAR $25.107(b/c)$	
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s

Tab. 7.3 – Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_{zOEI} de bimoteurs

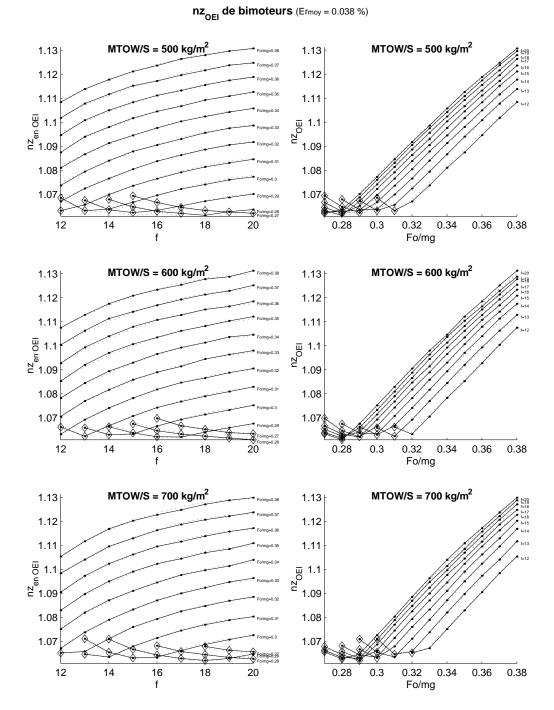


Fig. 7.10 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du facteur de charge à l'arrondi n_z . Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_z adapté aux quadrimoteurs sans panne moteur (AEO)

Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_{ZAEO} au décollage sans panne moteur pour des quadrimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.08 V_{S1}$

$$nz_{AEO} = \left(K_1 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_2 \frac{m}{S} + K_3\right) \frac{F_0}{mg} + K_4 \left(\frac{m}{S}\right)^2 + K_5 \frac{m}{S} + K_6$$

$$K_1 = -4.35 \cdot 10^{-7}$$
 $K_2 = 5.63 \cdot 10^{-4}$ $K_3 = 1.14 \cdot 10^{-3}$ $K_4 = 8.81 \cdot 10^{-8}$ $K_5 = -9.36 \cdot 10^{-5}$ $K_6 = 1.1198$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$nz_{AEO} = \left(K_{1}\frac{m}{S} + K_{2}\frac{F_{0}}{mg} + K_{3}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{4}\right)f^{2} + \left(K_{5}\frac{m}{S} + K_{6}\frac{F_{0}}{mg} + K_{7}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{8}\right)f + \left(K_{9}\frac{m}{S} + K_{10}\frac{F_{0}}{mg} + K_{11}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{12}\right)$$

Mode d'obtention: identifié par les moindres carrés sur les valeurs optimales (Section 7.2.2, p. 204) issues des simulations de décollage de quadrimoteurs (Section 4, p. 83). La méthode pour le choix de la structure des fonctions à identifier, ainsi que la méthode d'identification sont détaillées en annexe (Appendix C, p. 309).

Domaine de définition : avions de transport civil. Avions quadrimoteurs de taux de propulsion $0.2 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.3$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \le f \le 20$.

Pour déterminer si la vitesse de sécurité au décollage V_2 est contrainte ou non, il suffit de la calculer à l'aide de (Table 2.6, p. 59).

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.11% pour les décollages contraints en V_{2min} , et de 0.08% pour les décollages non contraints.

Symboles : Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o + C$	_
$\Delta Cx_{oTrain} + (\Delta Cx_{omoulinet}) + k_iCz^2$). Il dépend de la configuration becs/volets.	
F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.2 et 0.3	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
M_{MTOW} qui a été désignée par m dans ce chapitre pour simplifier	
les notations dans les équations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire de l'avion. Comprise entre 500 et 700 kg/m^2	kg/m^2
n_z : Facteur de charge de l'arrondi du modèle de phase aérienne du	_
décollage (Table 7.1, p. 202)	
S: Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale $V_{2min}=1.08V_{S1}$ pour	m/s
les quadrimoteurs selon la FAR 25.107(b/c)	•
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s

Tab. 7.4 – Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_{zAEO} de quadrimoteurs

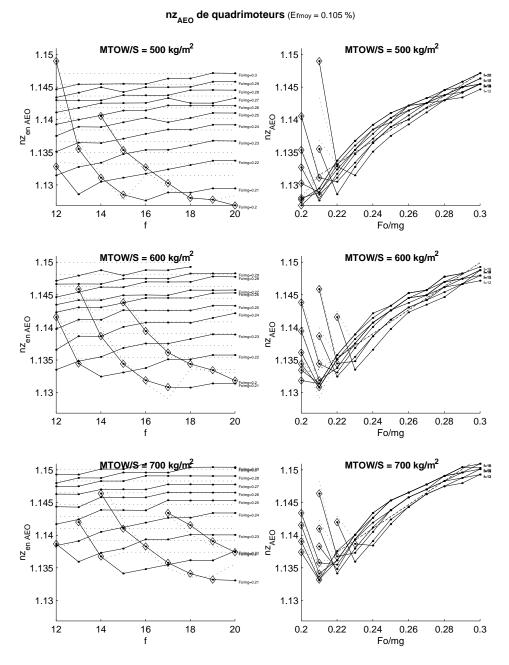


Fig. 7.11 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du facteur de charge à l'arrondi n_z . Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_z adapté aux quadrimoteurs avec panne moteur (OEI)

Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_{ZOEI} au décollage avec panne moteur pour des quadrimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.08 V_{S1}$

$$\begin{split} nz_{OEI} &= \left((K_1 \frac{m}{S} + K_2) f^2 + (K_3 \frac{m}{S} + K_4) f + (K_5 \frac{m}{S} + K_6) \right) \left(\frac{F_0}{mg} \right)^2 \\ &+ \left((K_7 \frac{m}{S} + K_8) f^2 + (K_9 \frac{m}{S} + K_{10}) f + (K_{11} \frac{m}{S} + K_{12}) \right) \frac{F_0}{mg} \\ &+ (K_{13} \frac{m}{S} + K_{14}) f^2 + (K_{15} \frac{m}{S} + K_{16}) f + (K_{17} \frac{m}{S} + K_{18}) \\ K_1 &= -1.25 \, 10^{-5} \quad K_2 &= -1.36 \, 10^{-4} \quad K_3 &= -4.69 \, 10^{-5} \quad K_4 &= 2.50 \, 10^{-3} \quad K_5 &= 1.07 \, 10^{-4} \quad K_6 &= 5.62 \, 10^{-3} \\ K_7 &= 6.57 \, 10^{-6} \quad K_8 &= -7.15 \, 10^{-5} \quad K_9 &= -3.42 \, 10^{-6} \quad K_{10} &= 6.52 \, 10^{-3} \quad K_{11} &= 6.13 \, 10^{-4} \quad K_{12} &= 0.472 \\ K_{13} &= -9.96 \, 10^{-7} \quad K_{14} &= -5.57 \, 10^{-5} \quad K_{15} &= 7.86 \, 10^{-6} \quad K_{16} &= 3.10 \, 10^{-3} \quad K_{17} &= -1.88 \, 10^{-4} \quad K_{18} &= 0.921 \end{split}$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$\begin{array}{ll} nz_{OEI} & = & \left(K_{1}\frac{m}{S} + K_{2}\frac{F_{0}}{mg} + K_{3}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{4}\right)f^{2} + \left(K_{5}\frac{m}{S} + K_{6}\frac{F_{0}}{mg} + K_{7}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{8}\right)f \\ & \qquad \qquad + \left(K_{9}\frac{m}{S} + K_{10}\frac{F_{0}}{mg} + K_{11}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{12}\right) \\ & \qquad \qquad K_{1} = -1.75\,10^{-6} \quad K_{2} = -1.50\,10^{-3} \quad K_{3} = 8.74\,10^{-6} \quad K_{4} = 5.49\,10^{-4} \\ & \qquad \qquad K_{5} = 2.54\,10^{-5} \quad K_{6} = -4.30\,10^{-3} \quad K_{7} = -1.37\,10^{-4} \quad K_{8} = -7.66\,10^{-3} \\ & \qquad \qquad K_{9} = 8.50\,10^{-5} \quad K_{10} = -7.58\,10^{-3} \quad K_{11} = -5.89\,10^{-5} \quad K_{12} = & 1.121 \end{array}$$

Mode d'obtention: identifié par les moindres carrés sur les valeurs optimales (Section 7.2.2, p. 204) issues des simulations de décollage de quadrimoteurs (Section 4, p. 83). La méthode pour le choix de la structure des fonctions à identifier, ainsi que la méthode d'identification sont détaillées en annexe (Appendix C, p. 309).

Domaine de définition : avions de transport civil. Avions quadrimoteurs de taux de propulsion $0.2 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.3$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \le f \le 20$.

Pour déterminer si la vitesse de sécurité au décollage V_2 est contrainte ou non, il suffit de la calculer à l'aide de (Table 2.6, p. 59).

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.05% pour les décollages contraints en V_{2min} , et de 0.04% pour les décollages non contraints.

Symboles : Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + (\Delta Cx_{omoulinet}) + k_i Cz^2$). Il dépend de la confi-	_
guration becs/volets.	
F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mq}$: Taux de propulsion de l'avion: compris entre 0.2 et 0.3	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{\pi\lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
M_{MTOW} qui a été désignée par m dans ce chapitre pour simplifier	
les notations dans les équations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire de l'avion. Comprise entre 500 et 700 kg/m^2	kg/m^2
\tilde{n}_z : Facteur de charge de l'arrondi du modèle de phase aérienne du décollage (Table 7.1, p. 202)	_
S : Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale $V_{2min}=1.08V_{S1}$ pour	m/s
les quadrimoteurs selon la FAR 25.107(b/c)	-
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s

Tab. 7.5 – Modèle du facteur de charge à l'arrondi n_{zOEI} de quadrimoteurs

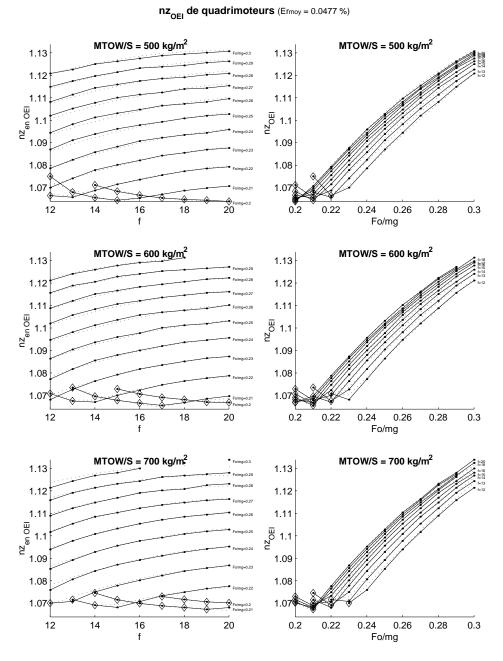


FIG. 7.12 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) du facteur de charge à l'arrondi n_z . Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage de bimoteurs sans panne moteur (AEO)

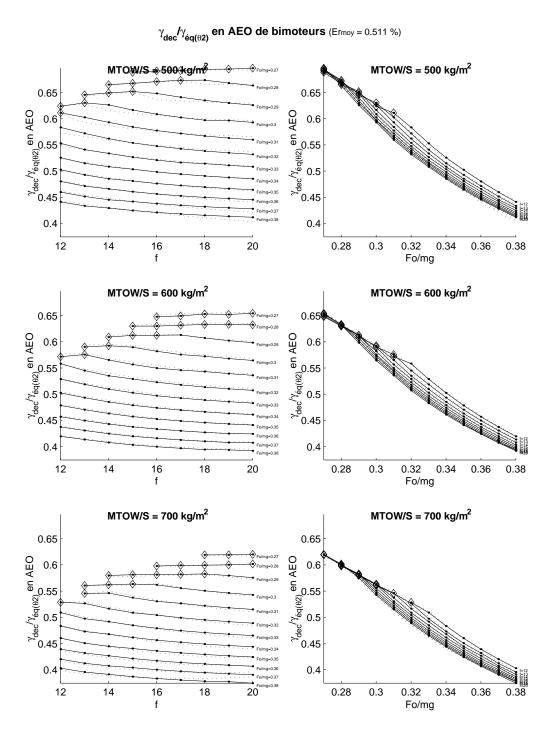


Fig. 7.13 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) de la pente rectiligne γ_{dec} . Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle de la pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage sans panne moteur pour des bimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13 V_{S1}$

$$\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{\acute{e}q}(\theta_2)}\right)_{AEO} = \\ \left(\left(K_1\frac{m}{S}+K_2\right)f^2+\left(K_3\frac{m}{S}+K_4\right)f+K_5\frac{m}{S}+K_6\right)\left(\frac{F_0}{mg}\right)^2 \\ + \\ \left(\left(K_7\frac{m}{S}+K_8\right)f^2+\left(K_9\frac{m}{S}+K_{10}\right)f+K_{11}\frac{m}{S}+K_{12}\right)\frac{F_0}{mg} \\ + \\ \left(K_{13}\frac{m}{S}+K_{14}\right)f^2+\left(K_{15}\frac{m}{S}+K_{16}\right)f+K_{17}\frac{m}{S}+K_{18} \\ K_1 = -3.08\,10^{-5} \quad K_2 = -4.43\,10^{-3} \quad K_3 = 1.88\,10^{-3} \quad K_4 = -3.05\,10^{-2} \quad K_5 = -1.21\,10^{-3} \quad K_6 = -6.39\,10^{-2} \\ K_7 = 3.16\,10^{-5} \quad K_8 = -4.18\,10^{-3} \quad K_9 = -1.12\,10^{-3} \quad K_{10} = -1.49\,10^{-2} \quad K_{11} = -4.17\,10^{-3} \quad K_{12} = -2.85\,10^{-2} \\ K_{13} = -6.16\,10^{-6} \quad K_{14} = 1.77\,10^{-3} \quad K_{15} = 1.26\,10^{-4} \quad K_{16} = 1.05\,10^{-2} \quad K_{17} = 1.65\,10^{-3} \quad K_{18} = 0.64 \\ \end{array}$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{\acute{e}q}(\theta_2)}\right)_{AEO} = \left(K_1\frac{m}{S} + K_2\frac{F_0}{mg} + K_3\frac{m}{S}\frac{F_0}{mg} + K_4\right)f^2 + \left(K_5\frac{m}{S} + K_6\frac{F_0}{mg} + K_7\frac{m}{S}\frac{F_0}{mg} + K_8\right)f$$

$$+ \left(K_9\frac{m}{S} + K_{10}\frac{F_0}{mg} + K_{11}\frac{m}{S}\frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

$$\frac{K_1 = -3.20\,10^{-6}}{K_5 = -1.75\,10^{-5}} \quad K_2 = -1.07\,10^{-2} \quad K_3 = 2.05\,10^{-5} \quad K_4 = 1.17\,10^{-3}$$

$$\frac{K_5 = -1.75\,10^{-5}}{K_9 = 5.32\,10^{-4}} \quad K_{10} = 6.79\,10^{-2} \quad K_{11} = -6.59\,10^{-4} \quad K_{12} = \quad 0.304$$

Mode d'obtention: identifié par les moindres carrés sur les valeurs optimales (Section 7.2.2, p. 204) issues des simulations de décollage de bimoteurs (Section 4, p. 83). La méthode pour le choix de la structure des fonctions à identifier, ainsi que la méthode d'identification sont détaillées en annexe (Appendix C, p. 309).

Domaine de définition : avions de transport civil. Avions bimoteurs de taux de propulsion $0.27 \leq \frac{F_0}{mg} \leq 0.38$, de charge alaire $500 \leq \frac{m}{S} \leq 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \leq f \leq 20$.

Pour déterminer si la vitesse de sécurité au décollage V_2 est contrainte ou non, il suffit de la calculer à l'aide de (Table 2.6, p. 59).

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.55% pour les décollages contraints en V_{2min} , et de 0.33% pour les décollages non contraints.

Symboles : Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + (\Delta Cx_{omoulinet}) + k_iCz^2$). Il dépend de la confi-	_
guration becs/volets. F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.27 et 0.38	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{C x_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
${\cal M}_{MTOW}$ qui a été désignée par m dans ce chapitre pour simplifier	
les notations dans les équations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire de l'avion. Comprise entre 500 et 700 kg/m^2	$\frac{kg/m^2}{m^2}$
S: Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale $V_{2min}=1.13V_{S1}$ pour	m/s
les bimoteurs selon la FAR $25.107(b/c)$	
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s
γ_{dec} : Pente de montée rectiligne au décollage du modèle de phase aérienne (Table 7.1, p. 202)	rad
$\gamma_{\rm \acute{e}q}(\theta_2)$: Pente d'équilibre théorique du décollage en cours avec train sorti. Se calcule analytiquement (Appendix B.1, p. 300)	rad

TAB. 7.6 – Modèle du rapport $\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{eq}(\theta_2)}\right)_{AEO}$ de bimoteurs

Pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage de bimoteurs avec panne moteur (OEI)

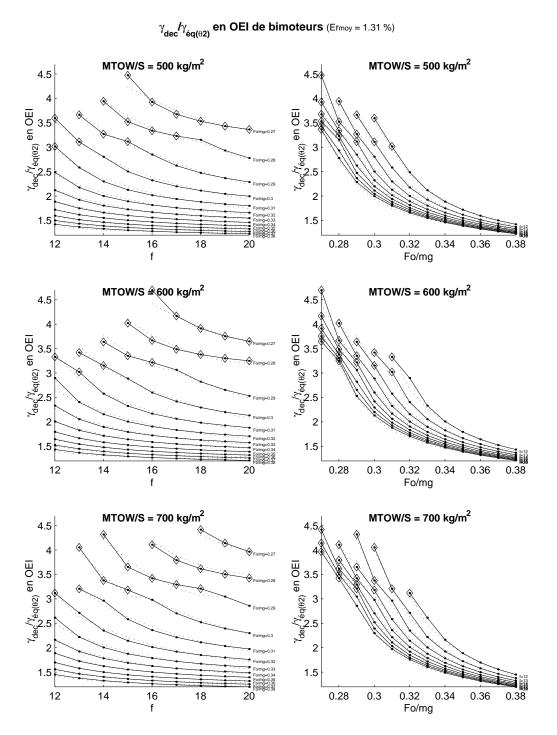


Fig. 7.14 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) de la pente rectiligne γ_{dec} . Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle de la pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage avec panne moteur pour des bimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13 V_{S1}$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{\acute{e}q}(\theta_2)}\right)_{OEI} = \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \frac{F_0}{mg} + K_3 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_4\right) f^2 + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \frac{F_0}{mg} + K_7 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_8\right) f^2 + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

$$+ \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

$$K_1 = -1.90 \ 10^{-4} \quad K_2 = -9.75 \ 10^{-2} \quad K_3 = 9.36 \ 10^{-4} \quad K_4 = 1.63 \ 10^{-2}$$

$$K_5 = 3.01 \ 10^{-3} \quad K_6 = -0.162 \quad K_7 = -2.06 \ 10^{-2} \quad K_8 = 0.409$$

$$K_9 = 2.15 \ 10^{-2} \quad K_{10} = -7.24 \ 10^{-2} \quad K_{11} = 2.95 \ 10^{-2} \quad K_{12} = -1.508$$

Mode d'obtention: identifié par les moindres carrés sur les valeurs optimales (Section 7.2.2, p. 204) issues des simulations de décollage de bimoteurs (Section 4, p. 83). La méthode pour le choix de la structure des fonctions à identifier, ainsi que la méthode d'identification sont détaillées en annexe (Appendix C, p. 309).

Domaine de définition : avions de transport civil. Avions bimoteurs de taux de propulsion $0.27 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.38$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \le f \le 20$.

Pour déterminer si la vitesse de sécurité au décollage V_2 est contrainte ou non, il suffit de la calculer à l'aide de (Table 2.6, p. 59).

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 1.17% pour les décollages contraints en V_{2min} , et de 1.96% pour les décollages non contraints.

Symboles: Désignation	Unités
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o +$	_
$\Delta Cx_{oTrain} + (\Delta Cx_{omoulinet}) + k_iCz^2$). Il dépend de la confi-	
guration becs/volets.	
F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.27 et 0.38	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	-
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
M_{MTOW} qui a été désignée par m dans ce chapitre pour simplifier	
les notations dans les équations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire de l'avion. Comprise entre 500 et 700 kg/m^2	$\frac{kg/m^2}{m^2}$
\widetilde{S} : Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale $V_{2min}=1.13V_{S1}$ pour	m/s
les bimoteurs selon la FAR $25.107(b/c)$	
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s
γ_{dec} : Pente de montée rectiligne au décollage du modèle de phase	rad
aérienne (Table 7.1, p. 202)	
$\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)$: Pente d'équilibre théorique du décollage en cours avec train sorti.	rad
Se calcule analytiquement (Appendix B.1, p. 300)	

Tab. 7.7 – Modèle du rapport $\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{\acute{e}q}(\theta_2)}\right)_{OEI}$ de bimoteurs

Pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage de quadrimoteurs sans panne moteur (AEO)

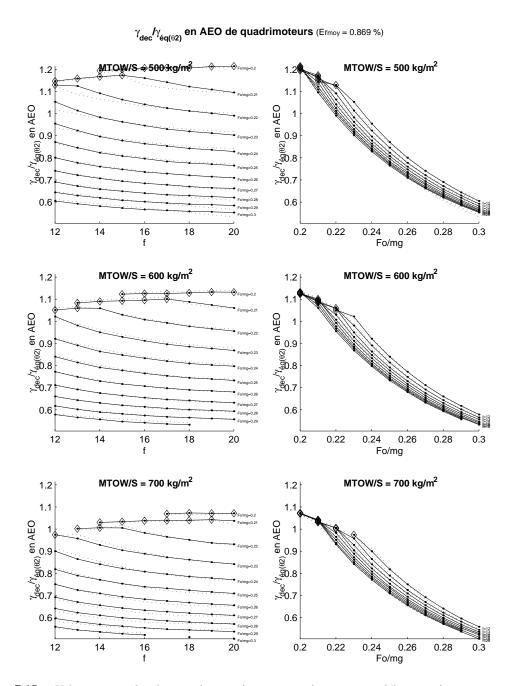


Fig. 7.15 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) de la pente rectiligne γ_{dec} . Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle de la pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage sans panne moteur pour des quadrimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.08 V_{S1}$

$$\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)}\right)_{AEO} = \\ \left(\left(K_1\frac{m}{S}+K_2\right)f^2+\left(K_3\frac{m}{S}+K_4\right)f+K_5\frac{m}{S}+K_6\right)\left(\frac{F_0}{mg}\right)^2 \\ + \\ \left(\left(K_7\frac{m}{S}+K_8\right)f^2+\left(K_9\frac{m}{S}+K_{10}\right)f+K_{11}\frac{m}{S}+K_{12}\right)\frac{F_0}{mg} \\ + \\ \left(K_{13}\frac{m}{S}+K_{14}\right)f^2+\left(K_{15}\frac{m}{S}+K_{16}\right)f+K_{17}\frac{m}{S}+K_{18} \\ K_1 = -3.70\, 10^{-4} \quad K_2 = \\ 6.31\, 10^{-3} \quad K_3 = \\ 1.11\, 10^{-2} \quad K_4 = \\ -0.139 \quad K_5 = -1.21\, 10^{-3} \quad K_6 = -0.297 \\ K_7 = \\ 1.88\, 10^{-4} \quad K_8 = -1.63\, 10^{-2} \quad K_9 = -4.41\, 10^{-3} \quad K_{10} = -7.12\, 10^{-2} \quad K_{11} = -1.95\, 10^{-2} \quad K_{12} = -0.115 \\ K_{13} = -1.95\, 10^{-5} \quad K_{14} = \\ 2.57\, 10^{-3} \quad K_{15} = \\ 2.53\, 10^{-4} \quad K_{16} = \\ 5.96\, 10^{-2} \quad K_{17} = \\ 6.02\, 10^{-3} \quad K_{18} = 0.774 \\ \end{array}$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$

$$\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{\acute{e}q}(\theta_2)}\right)_{AEO} = \left(K_1\frac{m}{S} + K_2\frac{F_0}{mg} + K_3\frac{m}{S}\frac{F_0}{mg} + K_4\right)f^2 + \left(K_5\frac{m}{S} + K_6\frac{F_0}{mg} + K_7\frac{m}{S}\frac{F_0}{mg} + K_8\right)f$$

$$+ \left(K_9\frac{m}{S} + K_{10}\frac{F_0}{mg} + K_{11}\frac{m}{S}\frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

$$\frac{K_1 = -1.54 \ 10^{-6}}{K_5 = -1.66 \ 10^{-5}} \quad K_6 = 8.45 \ 10^{-2} \quad K_7 = -8.15 \ 10^{-4} \quad K_8 = 0.102$$

$$K_9 = 9.82 \ 10^{-4} \quad K_{10} = 0.184 \quad K_{11} = -1.77 \ 10^{-4} \quad K_{12} = 0.409$$

Mode d'obtention: identifié par les moindres carrés sur les valeurs optimales (Section 7.2.2, p. 204) issues des simulations de décollage de quadrimoteurs (Section 4, p. 83). La méthode pour le choix de la structure des fonctions à identifier, ainsi que la méthode d'identification sont détaillées en annexe (Appendix C, p. 309).

Domaine de définition : avions de transport civil. Avions quadrimoteurs de taux de propulsion $0.2 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.3$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \le f \le 20$.

Pour déterminer si la vitesse de sécurité au décollage V_2 est contrainte ou non, il suffit de la calculer à l'aide de (Table 2.6, p. 59).

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 0.93% pour les décollages contraints en V_{2min} , et de 0.48% pour les décollages non contraints.

Symboles : Désignation	$\mathbf{Unit\acute{e}s}$
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + (\Delta Cx_{omoulinet}) + k_iCz^2$). Il dépend de la confi-	_
guration becs/volets.	
F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.2 et 0.3	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	_
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
m: Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
${\cal M}_{MTOW}$ qui a été désignée par m dans ce chapitre pour simplifier	
les notations dans les équations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire de l'avion. Comprise entre 500 et $700 kg/m^2$	kg/m^2
$\overset{\circ}{S}$: Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale $V_{2min}=1.08V_{S1}$ pour	m/s
les quadrimoteurs selon la FAR $25.107(b/c)$	
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s
γ_{dec} : Pente de montée rectiligne au décollage du modèle de phase aérienne (Table 7.1, p. 202)	rad
$ \gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2) $: Pente d'équilibre théorique du décollage en cours avec train sorti. Se calcule analytiquement (Appendix B.1, p. 300)	rad

TAB. 7.8 – Modèle du rapport $\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{eq}(\theta_2)}\right)_{AEO}$ de quadrimoteurs

Pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage de quadrimoteurs avec panne moteur (OEI)

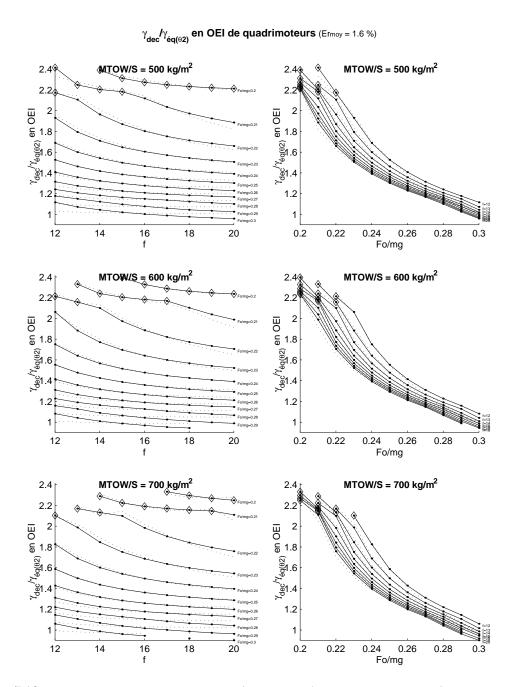


Fig. 7.16 – Valeurs optimales des simulations (trait continu) et notre modélisation (trait pointillé) de la pente rectiligne γ_{dec} . Les décollages non contraints par la vitesse de sécurité au décollage minimale V_{2min} sont indiqués par des losanges.

Modèle de la pente de montée rectiligne γ_{dec} au décollage avec panne moteur pour des quadrimoteurs.

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.08 V_{S1}$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2\,min}$

$$\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{eq}(\theta_2)}\right)_{OEI} = \left(K_1 \frac{m}{S} + K_2 \frac{F_0}{mg} + K_3 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_4\right) f^2 + \left(K_5 \frac{m}{S} + K_6 \frac{F_0}{mg} + K_7 \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_8\right) f^2 + \left(K_9 \frac{m}{S} + K_{10} \frac{F_0}{mg} + K_{11} \frac{m}{S} \frac{F_0}{mg} + K_{12}\right)$$

$$K_1 = -3.02 \, 10^{-5} \quad K_2 = -1.85 \, 10^{-2} \quad K_3 = 3.11 \, 10^{-4} \quad K_4 = -9.08 \, 10^{-3}$$

$$K_5 = 1.42 \, 10^{-4} \quad K_6 = -8.35 \, 10^{-3} \quad K_7 = -6.39 \, 10^{-3} \quad K_8 = 0.429$$

$$K_9 = 9.40 \, 10^{-3} \quad K_{10} = 0.1096 \quad K_{11} = 4.41 \, 10^{-3} \quad K_{12} = -1.439$$

Mode d'obtention : identifié par les moindres carrés sur les valeurs optimales (Section 7.2.2, p. 204) issues des simulations de décollage de quadrimoteurs (Section 4, p. 83). La méthode pour le choix de la structure des fonctions à identifier, ainsi que la méthode d'identification sont détaillées en annexe (Appendix C, p. 309).

Domaine de définition : avions de transport civil. Avions quadrimoteurs de taux de propulsion $0.2 \le \frac{F_0}{mg} \le 0.3$, de charge alaire $500 \le \frac{m}{S} \le 700$, et de finesse équivalente en croisière $12 \le f \le 20$.

Pour déterminer si la vitesse de sécurité au décollage V_2 est contrainte ou non, il suffit de la calculer à l'aide de (Table 2.6, p. 59).

Précision : Une erreur relative moyenne par rapport aux simulations numériques de 1.74% pour les décollages contraints en V_{2min} , et de 0.68% pour les décollages non contraints.

Symboles : Désignation	$\mathbf{Unit\acute{e}s}$
Cx_o : Coefficient de traînée de frottement de l'avion ($Cx = Cx_o +$	_
$\Delta Cx_{oTrain} + (\Delta Cx_{omoulinet}) + k_iCz^2$). Il dépend de la confi-	
guration becs/volets.	
F_0 : Poussée au point fixe, c'est-à-dire à vitesse et altitude nulles, de	N
tous les moteurs de l'avion	
$\frac{F_0}{mg}$: Taux de propulsion de l'avion : compris entre 0.2 et 0.3	_
f : Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5,	_
p. 209)	
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	$m/s^2 \ kq$
\boldsymbol{m} : Masse de l'avion au décollage. C'est la maximum Take-Off Weight	kg
${\cal M}_{MTOW}$ qui a été désignée par m dans ce chapitre pour simplifier	
les notations dans les équations.	
$\frac{m}{S}$: Charge alaire de l'avion. Comprise entre 500 et 700 kg/m^2	kg/m^2
S: Surface voilure de référence	m^2
V_2 : Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59)	m/s
V_{2min} : Vitesse de sécurité au décollage minimale $V_{2min}=1.08V_{S1}$ pour	m/s
les quadrimoteurs selon la FAR $25.107(b/c)$	
V_{S1} : Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s
γ_{dec} : Pente de montée rectiligne au décollage du modèle de phase	rad
aérienne (Table 7.1, p. 202)	
$\gamma_{\rm \acute{e}q}(\theta_2)$: Pente d'équilibre théorique du décollage en cours avec train sorti.	rad
Se calcule analytiquement (Appendix B.1, p. 300)	

Tab. 7.9 – Modèle du rapport $\left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{eq}(\theta_2)}\right)_{OEI}$ de quadrimoteurs

7.3 Commentaires et résultats du modèle de la phase aérienne

7.3.1 Confrontation du modèle de phase aérienne et des simulations

Pour chacun des 324 bimoteurs simulés, l'erreur relative entre la longueur de piste aérienne simulée $L_{p_{\mathrm{air}\,simu}}$ calculée par itération numérique (Section 4, p. 83), et celle donnée par notre modèle $L_{p_{\mathrm{air}\,model}}$ (Table 7.1, p. 202) en utilisant les lois identifiées pour les n_z et γ_{dec} , est calculée comme suit :

$$Er_{\%} = 100 \frac{L_{p_{\text{air}}simu} - L_{p_{\text{air}}model}}{L_{p_{\text{air}}simu}}$$

Ce calcul est effectué pour les cas de panne moteur au décollage (OEI One Engine Inoperative) et pour les cas de décollage sans panne moteur (AEO All Engines Operating).

Pour quantifier la précision du modèle, le critère d'erreur relative moyenne $Er_{moy\%}$ a été choisi. C'est la moyenne des valeurs absolues des erreurs relatives $Er_{\%}$ calculées pour chaque avion.

$$Er_{moy\%} = \frac{1}{N_{avions}} \sum_{i=1}^{N_{avions}} |Er_{\%}(i)|$$

Ainsi notre modèle de phase aérienne a une précision par rapport aux simulations numériques de :

	AEO	OEI
$Er_{moy\%}$	0.18%	0.49%
$\max\left(Er_{\%}(i)\right)$	0.81%	4.08%

La précision, par rapport aux simulations, de notre modèle de longueur de piste de la phase aérienne est remarquable puisque les estimations sont justes à moins de 0.5% près.

7.3.2 Faiblesse des modèles existants à n_z fixé et γ_{dec} calculée à l'équilibre

Les modèles existants de phase aérienne (Section 7.2.1, p. 203) préconisent un facteur de charge de l'arrondi circulaire n_z unique pour l'ensemble des avions, de l'ordre de 1.15 au décollage sans panne moteur (AEO All Engines Operating) et de 1.05 avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative), et une pente de montée rectiligne γ_{dec} calculée en supposant l'avion à l'équilibre (Appendix B.1, p. 300). La précision d'un tel modèle par rapport aux simulations numériques est alors nettement moins bonne que notre modèle :

	AEO	OEI
$Er_{moy\%}$	5.67%	79.1%

Le facteur de charge avec panne moteur est parfois considéré dans la littérature identique à celui sans panne moteur, soit égal à 1.15. Dans ce cas, l'erreur relative moyenne en cas de panne moteur diminue à 52%.

Si on cherche la valeur du facteur de charge n_z qui minimise l'erreur relative moyenne en cas de panne OEI et sans panne AEO, on trouve :

AEO : nz = 1.138 pour une erreur relative moyenne de $Er_{moy\%} = 4.88\%$ OEI : nz = 1.217 pour une erreur relative moyenne de $Er_{moy\%} = 51.5\%$

Ce qui montre une valeur exagérée pour le facteur de charge à l'arrondi avec panne moteur (OEI). En pratique les simulations montrent qu'en cas de panne moteur, le facteur de charge est toujours inférieur à celui sans panne moteur. L'optimisation de n_z converge vers cette valeur absurde pour forcer le modèle de phase aérienne a être uniquement circulaire (hauteur de sécurité passée pendant l'arrondi circulaire), de manière à ne pas subir l'influence⁵ de γ_{dec} qui est trop faible⁶.

Maintenant, considérons la valeur optimale de la pente γ_{dec} (Section 7.2.2, p. 204) c'est-à-dire la même que celle de notre modèle, mais conservons un facteur de charge nz constant de 1.15 pour tous les décollages sans panne moteur et 1.05 pour tous ceux avec panne moteur. La précision est alors bien meilleure que celle calculée précédemment où γ_{dec} était calculée à l'équilibre.

	AEO	OEI
$Er_{moy\%}$	5.35%	27.97%

Considérer un facteur de charge de 1.15 pour les décollages avec panne moteur réduit l'erreur OEI à 13.5%.

Ces résultats permettent de mettre en évidence que le choix de calculer γ_{dec} en considérant l'avion à l'équilibre est le plus pénalisant.

Pour résumer :

Notre modèle suit bien les simulations (Figure B.2, p. 304), (Figure B.3, p. 305), (Figure B.4, p. 306), (Figure B.5, p. 307), alors que le modèle existant (nz constant et γ_{dec} calculée à l'équilibre) sous-estime généralement les longueurs de pistes aérienne $L_{p_{\rm air}}$ sans panne moteur (AEO) et surestime largement les cas de panne moteur (OEI).

En cas de panne moteur, la dynamique fait que la pente $\gamma(h_s)$ au passage de la hauteur de sécurité, est en moyenne 1.3 fois plus grande que la pente d'équilibre. Le modèle existant qui considère la pente d'équilibre est donc fortement pénalisé de ce fait.

Choisir un facteur de charge moyen élevé pour les cas de panne moteur OEI (comme par exemple la valeur de $n_z = 1.15$ préconisée pour le décollage sans panne AEO) permet de "compenser" un petit peu cette erreur sans pour autant l'annuler : l'erreur relative moyenne est de 52% au lieu de 79.1%.

7.3.3 Explication physique de l'évolution des paramètres

Pourquoi la longueur de piste aérienne $L_{p_{\mathbf{air}}}$ augmente-t-elle quand la charge alaire $\frac{m}{S}$ augmente?

Pour une finesse f et un taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ donnés, la longueur de piste aérienne $L_{p_{\rm air}}$ croît lorsque la charge alaire $\frac{m}{S}$ croît (Figure B.2, et B.4). Tentons d'expliquer simplement ce phénomène.

Lorsque la charge alaire $\frac{m}{S}$ augmente, la vitesse de décrochage V_{S1} croît.

$$\frac{m}{S} = \frac{1}{2}\rho V_{S1}^2 C z_{max}$$

⁵Rappelons que dans le cas d'une phase aérienne modélisée uniquement par un arc de cercle, la valeur de γ_{dec} n'entre pas en compte dans la détermination de la longueur de piste aérienne.

⁶Nous avons montré (Section 7.2.2, p. 204) que la dynamique de la phase aérienne entraı̂ne des pentes au passage de la hauteur de sécurité, bien plus élevée que les pentes d'équilibre pour les cas de panne moteur.

Comme la plupart des avions ont une vitesse de sécurité au décollage contrainte V_2 $V_{2min} = 1.13V_{S1}$, cette vitesse V_2 augmente donc aussi lorsque la charge alaire $\frac{m}{S}$ aug-

Si la vitesse de sécurité au décollage V_2 augmente, la poussée maximale $F_{max}(V_2)$ à cette vitesse diminue donc. Avec un raisonnement iso taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ et iso finesse f, l'équation de propulsion rapportée à l'équation de sustentation permet de déduire que la pente d'équilibre $\gamma_{\text{éq}}(\theta_2)$ décroît.

$$\frac{F_{max}(V_2)}{mg} = \frac{F_{max}(V_2)}{F_0} \underbrace{\frac{F_0}{mg}}_{constante} = \underbrace{\frac{1}{f}}_{constante} + \gamma_{\acute{\text{eq}}}(\theta_2)$$

Si la pente $\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)$ décroît, alors la longueur de piste aérienne croît.

Ainsi, avec un raisonnement rapide, on peut concevoir que la longueur de piste aérienne $L_{p_{\text{air}}}$ augmente lorsque la charge alaire $\frac{m}{S}$ augmente (à iso taux de propulsion et iso finesse).

CE QU'IL FAUT RETENIR 7.1 Pour un même taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ et une même finesse f, augmenter la charge alaire $\frac{m}{S}$ a pour conséquence d'augmenter la longueur de piste parcourue durant la phase aérienne $L_{p_{air}}$ (entre V_{LOF} et le passage de la hauteur de sécurité h_s).

Pour quoi la longueur de piste aérienne $L_{p_{\mathbf{air}}}$ diminue-t-elle quand la finesse faugmente?

Pour une charge alaire $\frac{m}{S}$ et un taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ donnés, la longueur de piste aérienne $L_{p_{air}}$ décroît lorsque une finesse f croît (Figure B.3, et B.5). Tentons d'expliquer simplement ce phénomène.

Considérer une charge alaire $\frac{m}{S}$ constante implique une vitesse de décrochage V_{S1} $\sqrt{\frac{m}{S}} \frac{1}{\frac{1}{2}\rho Cz_{max}}$ constante. Comme la plupart des avions simulés ont une vitesse de sécurité au décollage contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13V_{S1}$, la V_2 est constante aussi. Ceci implique un rapport de poussée $\frac{F_{max}(V_2)}{F_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\left(1+q_1V_2+q_2V_2^2\right)$ constant. Avec l'hypothèse d'un taux de propulsion $\frac{F_0}{mq}$ constant, cela revient à considérer le rapport $\frac{F_{max}(V_2)}{mq}$ $\frac{F_{max}(V_2)}{F_0}\frac{F_0}{mg}$ constant. Si la finesse f augmente, alors la pente d'équilibre augmente :

$$\underbrace{\frac{F_{max}(V_2)}{mg}}_{constante} = \frac{1}{f} + \gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)$$

ce qui a pour conséquence de diminuer la longueur de piste aérienne $L_{p_{\rm air}}.$

Ce qu'il faut retenir 7.2 Pour un même taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ et une même charge alaire $\frac{m}{S}$, augmenter la finesse f a pour conséquence de diminuer la longueur de piste parcourue durant la phase aérienne $L_{p_{air}}$ (entre V_{LOF} et le passage de la hauteur de sécurité h_s).

228 18 décembre 2006

Pourquoi la longueur de piste aérienne $L_{p_{air}}$ diminue-t-elle quand le taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ augmente?

Pour une charge alaire $\frac{m}{S}$ et une finesse f données, la longueur de piste aérienne $L_{p_{\text{air}}}$ décroît lorsque le taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ croît (Figure B.2, et B.4). Tentons d'expliquer simplement ce phénomène.

Par un raisonnement similaire au précédant, considérer une charge alaire $\frac{m}{S}$ constante, implique une vitesse de décrochage $V_{S1} = \sqrt{\frac{m}{S} \frac{1}{\frac{1}{2}\rho Cz_{max}}}$ constante, et donc une vitesse de sécurité au décollage V_2 constante dans la plupart des cas où cette vitesse est contrainte $V_2 = V_{2min} = 1.13V_{S1}$. Le rapport de poussée $\frac{F_{max}(V_2)}{F_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \left(1 + q_1V_2 + q_2V_2^2\right)$ est donc constant également. Si on considère une finesse f constante, alors la pente d'équilibre $\gamma_{\rm éq}(\theta_2)$ croît quand le taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ croît.

$$\frac{F_{max}(V_2)}{mg} = \underbrace{\frac{F_{max}(V_2)}{F_0}}_{constante} \frac{F_0}{mg} = \underbrace{\frac{1}{f}}_{constante} + \gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)$$

Ceci a pour conséquence d'augmenter la longueur de piste aérienne $L_{p_{\text{air}}}$.

CE QU'IL FAUT RETENIR 7.3 Pour une même finesse f et une même charge alaire $\frac{m}{S}$, augmenter le taux de propulsion $\frac{F_0}{mg}$ a pour conséquence de diminuer la longueur de piste parcourue durant la phase aérienne $L_{P_{\text{air}}}$ (entre V_{LOF} et le passage de la hauteur de sécurité h_s).

Chapitre 8

Conclusion : modèle analytique de la longueur de piste

Dans les deux chapitres précédents, nous avons élaborés des modèles du roulage (Section 6, p. 113) et de la phase aérienne (Section 7, p. 193). Ces modèles nous permettent d'obtenir un modèle de la longueur de piste au décollage L_p . La longueur de piste L_p effective au décollage d'un avion est la somme de la longueur de piste au roulage L_{p_T} et de la longueur de piste de la phase aérienne $L_{p_{\rm air}}$.

$$L_p = L_{p_r} + L_{p_{\text{air}}}$$

Les modèles de ces longueurs sont rappelés dans ce chapitre, pour les cas de décollage avec et sans panne moteur, pour le décollage interrompu et pour l'atterrissage.

À ces longueurs de piste effectives ainsi calculées, la norme avion FAR 25 prévoit une marge de sécurité et définit les longueurs de pistes réglementaires, qui seront également exposées dans ce chapitre.

Ainsi, ce chapitre récapitulatif fait la synthèse de nos modèles dans le but de vous donner les outils nécessaires au calcul des longueurs de piste au décollage.

8.1 Modèle de la longueur de piste effective L_p

Modèle de longueur de piste effective L_p au décollage/atterrissage

Décollage sans panne moteur (AEO All Engines Operating)

$$L_p = L_{p_{rAEO}}(0 \to V_R) + L_{p_{r\circlearrowleft AEO}} + L_{p_{\text{air}}}$$

Décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative)

$$L_p = L_{p_{rAEO}}(0 \rightarrow V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \rightarrow V_R) + L_{p_{r\circlearrowleft OEI}} + L_{p_{\text{air}}}$$

Décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off)

$$L_p = L_{p_{rAEO}}(0 \to V_{EF}) + L_{p_{rOEI}}(V_{EF} \to V_1) + L_{p_{rRTO}}(V_1 \to 0)$$

Atterrissage

$$L_p = L_{p_{\text{air}}} + L_{p_r \circlearrowleft_{Att}} + L_{p_{rAtt}}$$

Pour calculer :	considérez (Table 8.1, p. 234) avec :
$L_{p_{rAEO}}$	$F_{ref} = F_0,$ $\Delta Cx_{omoulinet} = 0, \Delta Cx_{oSP} = 0, \Delta Cz_{oSP} = 0, \mu = \mu_r$
$L_{p_{TOEI}}$	$F_{ref} = \frac{N_m - 1}{N_m} F_0, \qquad \Delta C x_{oSP} = 0, \ \Delta C z_{oSP} = 0, \ \mu = \mu_r$
$L_{p_{TRTO}}$	$F_{ref} = \frac{N_m^{-1}}{N_m} F_{red}, \Delta Cx_{omoulinet} = 0, \qquad \mu = \mu_f$
$L_{p_{r\circlearrowleft Att}}$	$F_{ref} = F_{red}, \qquad \mu = \mu_r$
$L_{p_{rAtt}}$	$F_{ref} = F_{red},$ $\mu = \mu_f$

Pratt (c) (cd)	
Symboles : Désignation	U
α_{moy} : Incidence moyenne à considérer dans notre modèle pour la rotation :	C
$lpha_{moy}$: included indyeline a considerer dans notice modele pour la rotation : : $lpha_{moy} = 0.61 lpha_{LOF} + (1-0.61) lpha_r$	
α_{LOR} : Incidence de l'avion au décollage $\alpha_{LOR} = \alpha_0 + \frac{mg}{mg}$	
α_{LOF} : Incidence de l'avion au décollage $\alpha_{LOF}=\alpha_0+rac{mg}{rac{1}{2} ho SV_{LOF}^2Cz\alpha}$	
α_r : Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)	
α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.	
Δ : Discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$. Généralement positif pour le décollage et l'atterrissage,	
et négatif en cas de freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO)	
(Section A.1, p. 245).	
ΔCx_o : Augmentation du coefficient de traînée due au train d'atterrissage ΔCx_{oTrain} , au moteur	
en panne $\Delta Cx_{omoulinet}$, à la sortie des spoilers ΔCx_{oSP}	
ΔCz_{oSP} : Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers	
Δt : Temps écoulé au roulage pour que l'avion passe de la vitesse initiale V_i à la vitesse finale	
V_f .	
ΔX : Distance parcourue par l'avion au roulage pour passer de la vitesse initiale V_i à la vitesse	
$\text{finale } V_f.$	
Γ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la piste, modélisée par :	r
$\Gamma = AV^2 + BV + C$ avec A, B, C constants (Equation 6.4, p. 120). Pour la portion de	
roulage étudiée, l'accélération initiale est notée $\Gamma_i = \Gamma(V_i)$ et l'accélération finale $\Gamma_f =$	
$\Gamma(V_f)$.	
Γ_{min} : Accélération minimale si $A>0$ ou maximale si $A<0$. $\Gamma_{min}=rac{-\Delta}{4A}$	n
γ_p : Pente de la piste, supposée constante	
γ_{dec} : Pente de montée rectiligne au décollage du modèle de phase aérienne (Table 7.1, p. 202)	
$\gamma_{eq}(\theta_2)$: Pente d'équilibre qui serait obtenue si l'assiette de montée θ_2 était maintenue suffisamment	
longtemps pour que l'avion atteigne l'état d'équilibre, train sorti, avec ou sans panne	
moteur. (Appendix B.1, p. 300)	
λ : Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$	
μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le	
freinage (Table A.2, p. 273).	
ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste	k
	k_{ℓ}
ρ_0 : Masse volumique au niveau de la mer: $\rho_0 = 1.225 kg/m^3$ θ_2 : Assiette de montée imposée au cours du décollage (loi de pilotage en assiette de type	κς
AirFrance (Table 3.1, p. 74)). Se calcule analytiquement (Table 2.7, p. 62).	

-	Désignation	Unités
	All Engines Operating. Cas d'un décollage sans panne moteur. Coefficients du polynôme représentant l'accélération avion Γ (Equation 6.4,	$m^{-1}, s^{-1} \text{ et } m/s^2$
	p. 120) dont le sens physique et dont les signes ont été discutés précédemment (Table 6.1, p. 121). Le coefficient A est le paramètre d'ouverture de la pa-	
	rabole représentant l'accélération Γ en fonction de la vitesse V (Figure A.1,	
	p. 246). Si $A > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (et inversement pour $A < 0$, la parabole est ouverte vers le bas). Le coefficient C représente	
	la valeur de l'accélération statique $C = \Gamma(V = 0)$. Au décollage, le coefficient $C > 0$ est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C < 0$.	
Cx:	Envergure de la voilure. Distance entre les extrémités des ailes Coefficient de traînée de l'avion au roulage.	$egin{matrix} m \\ - \end{matrix}$
	Coefficient de portance de l'avion au roulage. Gradient de coefficient de portance avec l'incidence	rad^{-1}
	Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Dépend de la configuration Bec/Volet.	_
	Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) de tous les moteurs Taux de propulsion de l'avion : entre 0.27 et 0.38 pour nos simulations	<i>N</i>
	Poussée de ralenti tous les moteurs (à vitesse et altitude nulles). Peut-être	$\stackrel{-}{N}$
	considérée négative en cas de réverse, uniquement pour la certification d'un décollage interrompu RTO sur piste mouillée ou enneigée.	
F_{ref} :	Poussée au point fixe de référence au roulage : $F_{ref} = F_0$ en régime moteur maximal (décollage), $F_{ref} = F_{red}$ au ralenti (atterrissage ou RTO).	N
	Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121)	m/s^2
f_r :	Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121)	m/s^2
f:	Finesse "équivalente" de croisière $f = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{Cx_o}}$ (Remarque 7.5, p. 209) Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$	m/s^2
	Hauteur de sécurité. C'est au passage de cette hauteur que le calcul de la	m
	longueur de piste s'arrête. Au décollage (cf.FAR 25.113), $h_s=35ft=10.7m$ sur piste sèche et $h_s=15ft=4.6m$ sur piste mouillée, et à l'atterrissage (cf.FAR 25.125), $h_s=50ft=15.2m$.	
k_i :	Coefficient de traînée induite $k_i=\frac{1}{\pi\lambda}$ Longueur de piste parcourue durant la phase aérienne du	m
	décollage/atterrissage (entre V_{LOF} ou V_{TD} et h_s)	
	Distance parcourue par l'avion sur la piste durant la rotation, Masse de l'avion	$m \ kg$
$\frac{m}{S}$:	Charge alaire de l'avion. Comprise entre 500 et 700 kg/m^2 pour nos simulations	kg/m^2
	Nombre de moteurs équipant l'avion	_
	Facteur de charge de l'arrondi du modèle de phase aérienne (Table 7.1, p. 202)	_
OEI .	One Engine Inoperative. Cas d'un décollage avec panne moteur. Ici avec la panne moteur intervenant au moment le plus critique, c'est-à-dire forçant le pilote à prendre sa décision de continuer le décollage à la vitesse de décision V_1 .	
	Coefficients du modèle de poussée (Equation 6.3, p. 119) Rayon de l'arc de cercle modélisant l'arrondi	$(m/s)^{-1}$ et $(m/s)^{-2}$
	Rejected Take-Off. Cas d'un décollage interrompu	
	Surface voilure Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)	$m^2 \ m^{-1}$
V_i, V_f :	Vitesse initiale V_i et finale V_f de la portion de roulage étudiée.	m/s
	Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$ pour $\Delta>0$: $V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et	m/s
$V_{\Gamma_{min}}$:	$V_{\Gamma=0}^{\ominus}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. Vitesse pour laquelle l'accélération $\Gamma=\Gamma_{min}$ est minimale si $A>0$ ou maximale si $A<0$. $V_{\Gamma_{min}}=-\frac{B}{2A}$. Vitesse la plus critique à laquelle une panne moteur peut survenir	m/s
V_{EF} :	maximale si $A < 0$. $V_{\Gamma_{min}} = -\frac{2}{2A}$. Vitesse la plus critique à laquelle une panne moteur peut survenir	m/s
V_1 :	Vitesse de décision (Table 5.1, p. 95). Vitesse à laquelle le pilote prend la première mesure pour arrêter l'avion en cas de décollage interrompu, et vitesse minimale à la suite d'une panne moteur critique à V_{EF} , qui permet	m/s
V_{γ} .	de décoller en satisfaisant le passage de la hauteur de sécurité h_s . Vitesse de sécurité au décollage (Table 2.6, p. 59)	m/s
V_{2min} :	Vitesse de sécurité au décollage minimale (cf.FAR 25.107(b/c))	m/s
V_{LOF} :	Vitesse de décollage "lift-off" où l'avion quitte totalement le sol (Table 5.5, p. 105) et (Table 5.6, p. 106).	m/s
	Vitesse de rotation (Table 5.3, p. 102). Vitesse à laquelle le pilote tire sur le manche, la roulette de nez quitte le sol.	m/s
V_{S1} :	Vitesse de décrochage à 1 g (Equation 2.1, p. 32)	m/s

Longueur de piste au roulage L_{p_r} et temps de roulage t_{p_r} de roulage, entre les vitesses initiale V_i et finale V_f . pour une accélération avion de la forme $\Gamma = AV^2 + BV + C = A(V - V_{\Gamma_{min}})^2 + \Gamma_{min}$

$$L_{p_r}(V_i \to V_f) = \frac{1}{2 A} \ln \left(\frac{\Gamma_f}{\Gamma_i}\right) + V_{\Gamma_{min}} \Delta t$$

Au décollage et à l'atterrissage : $(\Delta > 0)$

Au decollage et à l'atterrissage :
$$(\Delta > 0)$$

$$t_{p_r}(V_i \to V_f) = \frac{1}{A\left(V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}\right)} \ln\left(\frac{\overline{V_f}^{\oplus} - 1}{\overline{V_f}^{\ominus} - 1} \frac{\overline{V_i}^{\ominus} - 1}{\overline{V_i}^{\ominus} - 1}\right)$$
Au décollage interrempe (RTO Rejected d'

Au décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) : $(\Delta < 0)$

Au decollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff):
$$(\Delta < 0)$$

$$t_{p_r}(V_i \to V_f) = \frac{signe(A)}{\sqrt{A\Gamma_{min}}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{V_f - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_i - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) \right)$$

$$\begin{array}{lll} \Delta &= B^2 - 4AC & \overline{V}^{\oplus} &= \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\oplus}} & \text{et } \overline{V}^{\ominus} = \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus} &= \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} & V_{\Gamma_{min}} &= -\frac{B}{2A} \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus} &= \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} & \Gamma_{min} &= -\frac{\Delta}{4A} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A &= q_2 \, \widetilde{F} - \widetilde{T} & \widetilde{F} &= \frac{F_{ref}}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \, \left(\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r \right) \\ B &= q_1 \, \widetilde{F} & \widetilde{T} &= \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \, \left(Cx - \mu \, Cz \right) \\ C &= \widetilde{F} - \widetilde{f}_r & \widetilde{f}_r &= \left(\sin \gamma_p + \mu \cos \gamma_p \right) g \\ Cz &= Cz_{\alpha} \left(\alpha_r - \alpha_0 \right) + \Delta Cz_{oSP} \\ Cx &= Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + \Delta Cx_{oSP} + k_i \, Cz^2 \end{array}$$

Mode d'obtention : Analytique par intégration cinétique de l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) : $L_{p_r}(V_i \to V_f) = \int_{V_i}^{V_f} \frac{V dV}{\Gamma}$ et $t_{p_r}(V_i \to V_f) = \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{\Gamma}$.

Domaine de définition : Tout avion au roulage. Il faut scinder le roulage en autant de portions qu'il y a de phase où l'avion change de mode de fonctionnement c'est-à-dire dès lors que l'avion sort des spoilers, freine ou a une panne moteur, Car à chacun de ces changements, la valeur des coefficients A, B, C est modifiée et nos formules ne sont valables que lorsque ces coefficients sont constants.

Précision: Ce modèle a été obtenue par une résolution analytique exacte, sans aucune approximation, dans le cadre des hypothèses d'une poussée moteur modélisée par $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 M + q_2 M^2\right)$ et dirigée selon l'axe du fuselage, une incidence au roulage constante $\alpha_r = cte$, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et une pente de la piste $\gamma_p = cte$ supposée constante sur toute la portion de roulage étudiée.

TAB. 8.1 – Modèle de longueur de piste au roulage (cf. Résolution cinétique (Table 6.3, p. 134)). Si vous désirez tenir compte d'un coefficient de frottement pneu/piste dépendant de la vitesse, reportez-vous à (Table 6.5, p. 149). Si vous voulez considérer un vent longitudinal, utilisez (Table 6.9, p. 162).

234 18 décembre 2006 Modèle de la rotation par extension de la résolution cinétique : longueur parcourue $L_{p_{r\circlearrowleft}}$ et temps écoulé $t_{p_r\circlearrowleft}$ durant la rotation, pour une accélération avion de la forme

$$\Gamma = AV^2 + BV + C = A\left(V - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$$

$$L_{p_{r\circlearrowleft}} = \frac{1}{2 A} \ln \left(\frac{\Gamma(V_{LOF})}{\Gamma(V_R)} \right) + V_{\Gamma_{min}} t_{p_{r\circlearrowleft}}$$

Au décollage et à l'atterrissage : $(\Delta > 0)$

$$t_{p_{r\circlearrowleft}} \ = \ \frac{1}{A\left(V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}\right)} \, \ln\left(\frac{\overline{V_{LOF}}^{\oplus} - 1}{\overline{V_{LOF}}^{\ominus} - 1} \, \frac{\overline{V_R}^{\ominus} - 1}{\overline{V_R}^{\oplus} - 1}\right)$$

Au décollage interrompu (RTO Rejected-TakeOff) : $(\Delta < 0)$

$$t_{p_{r\circlearrowleft}} = \frac{signe(A)}{\sqrt{A\Gamma_{min}}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{V_{LOF} - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_{R} - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{A}}} \right) \right)$$

$$\Delta = B^2 - 4AC \qquad \overline{V}^{\oplus} = \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\oplus}} \quad \text{et } \overline{V}^{\ominus} = \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\ominus}}$$

$$V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}$$

$$V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad \Gamma_{min} = -\frac{\Delta}{4A}$$

$$\begin{array}{lll} A &= q_2 \, \widetilde{F} - \widetilde{T} & \widetilde{F} &= \frac{F_0 \, \rho}{m \, \rho_0} \, (\cos \alpha_{moy} + \mu \sin \alpha_{moy}) \\ B &= q_1 \, \widetilde{F} & \widetilde{T} &= \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} \, (Cx - \mu \, Cz) \\ C &= \widetilde{F} - \widetilde{f_r} & \widetilde{f_r} &= (\sin \gamma_p + \mu \cos \gamma_p) \, g \\ Cz &= Cz\alpha \, (\alpha_{moy} - \alpha_0) + \Delta Cz_{oSP} \end{array}$$

$$Cx = Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet} + \Delta Cx_{oSP} + k_i Cz^2$$

Mode d'obtention : Analytique par intégration cinétique de l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) : $L_{p_{T\circlearrowleft}} = \int_{V_R}^{V_{LOF}} \frac{V dV}{\Gamma}$ et $t_{p_{T\circlearrowleft}} = \int_{V_R}^{V_{LOF}} \frac{dV}{\Gamma}$.

Domaine de définition : Tout avion au roulage.

Précision : Ce modèle a été obtenue par une résolution analytique exacte, dans le cadre des hypothèses d'une poussée moteur modélisée par $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 M + q_2 M^2\right)$ et dirigée selon l'axe du fuselage, une incidence constante $\alpha = cte$, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et une pente de la piste $\gamma_p = cte$ supposée constante sur toute la portion de roulage étudiée. En pratique l'incidence de l'avion varie durant la rotation. L'erreur d'estimation du roulage avec la rotation modélisée à $\alpha_{moy} = \frac{\alpha_r + \alpha_{LOF}}{2P}$, est de 0.6% pour un A300 effectuant une rotation à vitesse constante $q = 4^\circ/s$ (Figure 6.23, p. 186). L'incidence moyenne optimale est de $\alpha_{moy} = 0.61\alpha_{LOF} + (1-0.61)\,\alpha_r$ avec une erreur d'estimation de 0.01% pour le cas de l'A300 à $q = 4^\circ/s$.

Tab. 8.2 – Extension du modèle de Résolution cinétique à la rotation entre V_R et V_{LOF}

Modèle de la phase aérienne du décollage/atterrissage sous forme d'arrondi circulaire et de montée rectiligne.

$$R = \frac{V_2^2}{(n_z - \cos(\gamma_{dec} - \gamma_p)) g}$$

$$h_{dec} = 2R \sin^2 \frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2}$$

Cas du passage de la hauteur de sécurité durant la montée rectiligne $(h_{dec} \leq h_s)$:

$$L_{p_{\text{air}}} = R \tan\left(\frac{\gamma_{dec} - \gamma_p}{2}\right) + \frac{h_s}{\tan\left(\gamma_{dec} - \gamma_p\right)}$$

Cas du passage de la hauteur de sécurité durant l'arrondi $(h_{dec} \ge h_s)$:

$$L_{p_{air}} = \sqrt{h_s} \sqrt{2R - h_s}$$

Mode d'obtention : analytique, en supposant la trajectoire de l'avion durant la phase aérienne du décollage/atterrissage sous forme d'arrondi circulaire et de montée rectilione.

Domaine de définition : avions de transport civil. Les modèles de facteur de charge nz et de pente de montée rectiligne γ_{dec} sont donnés ci-dessous, pour des taux de propulsion $0.27 \leq \frac{F_0}{mg} \leq 0.38$ pour des bimoteurs (entre 0.2 et 0.3 pour des quadrimoteurs), de charge alaire $500 \leq \frac{m}{S} \leq 700$, et de finesse en croisière $12 \leq f \leq 20$.

Précision: Une erreur relative moyenne (Section 7.3, p. 226) par rapport aux simulations des bimoteurs, de 0.18% pour les longueurs de phase aérienne de décollage sans panne moteur (AEO), et de 0.49% pour celle de décollage avec panne moteur (OEI). Pour les quadrimoteurs, la précision est de 0.42% sans panne moteur et 0.34% avec panne.

TAB. 8.3 – Modèle de la longueur de piste parcourue durant la phase aérienne du décollage/atterrissage $L_{p_{\rm air}}$ (Table 7.1, p. 202).

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est contrainte $V_2 = V_{2min}$

$$nz_{AEO} \ = \ \left(K_1 \left(\frac{m}{S} \right)^2 + K_2 \frac{m}{S} + K_3 \right) \frac{F_0}{mg} + K_4 \left(\frac{m}{S} \right)^2 + K_5 \frac{m}{S} + K_6$$

$$n_{zOEI} = \left((K_1 \frac{m}{S} + K_2) f^2 + (K_3 \frac{m}{S} + K_4) f + (K_5 \frac{m}{S} + K_6) \right) \left(\frac{F_0}{mg} \right)^2$$

$$+ \left((K_7 \frac{m}{S} + K_8) f^2 + (K_9 \frac{m}{S} + K_{10}) f + (K_{11} \frac{m}{S} + K_{12}) \right) \frac{F_0}{mg}$$

$$+ (K_{13} \frac{m}{S} + K_{14}) f^2 + (K_{15} \frac{m}{S} + K_{16}) f + (K_{17} \frac{m}{S} + K_{18})$$

$$\left(\frac{\gamma_{deq}(\theta_2)}{\gamma_{\acute{e}q}(\theta_2)}\right)_{AEO} = \\ \left(\left(K_1\frac{m}{S} + K_2\right)f^2 + \left(K_3\frac{m}{S} + K_4\right)f + K_5\frac{m}{S} + K_6\right)\left(\frac{F_0}{mg}\right)^2 \\ + \left(\left(K_7\frac{m}{S} + K_8\right)f^2 + \left(K_9\frac{m}{S} + K_{10}\right)f + K_{11}\frac{m}{S} + K_{12}\right)\frac{F_0}{mg} \\ + \left(K_{13}\frac{m}{S} + K_{14}\right)f^2 + \left(K_{15}\frac{m}{S} + K_{16}\right)f + K_{17}\frac{m}{S} + K_{18} \\ \\ Four les bimoteurs: \\ K_1 = -3.08 \, 10^{-5} \quad K_2 = -4.43 \, 10^{-3} \quad K_3 = 1.88 \, 10^{-3} \quad K_4 = -3.05 \, 10^{-2} \quad K_5 = -1.21 \, 10^{-3} \quad K_6 = -6.39 \, 10^{-2} \\ K_7 = 3.16 \, 10^{-5} \quad K_8 = -4.18 \, 10^{-3} \quad K_9 = -1.12 \, 10^{-3} \quad K_{10} = -1.49 \, 10^{-2} \quad K_{11} = -4.17 \, 10^{-3} \quad K_{12} = -2.85 \, 10^{-2} \\ K_{13} = -6.16 \, 10^{-6} \quad K_{14} = 1.77 \, 10^{-3} \quad K_{15} = 1.26 \, 10^{-4} \quad K_{16} = 1.05 \, 10^{-2} \quad K_{17} = 1.65 \, 10^{-3} \quad K_{18} = 0.64 \\ \\ K_1 = -3.70 \, 10^{-4} \quad K_2 = 6.31 \, 10^{-3} \quad K_3 = 1.11 \, 10^{-2} \quad K_4 = -0.139 \quad K_5 = -1.21 \, 10^{-3} \quad K_6 = -0.297 \\ K_7 = 1.88 \, 10^{-4} \quad K_8 = -1.63 \, 10^{-2} \quad K_9 = -4.41 \, 10^{-3} \quad K_{10} = -7.12 \, 10^{-2} \quad K_{11} = -1.95 \, 10^{-2} \quad K_{12} = -0.115 \\ K_{13} = -1.95 \, 10^{-5} \quad K_{14} = 2.57 \, 10^{-3} \quad K_{15} = 2.53 \, 10^{-4} \quad K_{16} = 5.96 \, 10^{-2} \quad K_{17} = 6.02 \, 10^{-3} \quad K_{18} = 0.774 \\ \\ \left(\frac{\gamma_{dec}}{\gamma_{\acute{e}q}(\theta_2)}\right)_{OEI} = K_1 \, e^{\left(K_2\frac{F_0}{mg} + K_3\frac{m}{S} + K_4\right)f} + K_5\frac{F_0}{mg} + K_6\frac{m}{S} + K_7 \\ \\ Four les bimoteurs: \\ K_1 = 21.9 \quad K_2 = -2.78 \quad K_3 = 1.81 \, 10^{-4} \quad K_4 = 0.536 \\ K_5 = -4.23 \quad K_6 = -1.46 \, 10^{-4} \quad K_7 = 2.93 \\ \\ Four les quadrimoteurs: \\ K_1 = 14.4 \quad K_2 = -3.83 \quad K_3 = 1.84 \, 10^{-4} \quad K_7 = 2.98 \\ \\ Four les quadrimoteurs: \\ K_5 = -6.17 \quad K_6 = -2.43 \, 10^{-4} \quad K_7 = 2.98 \\ \\ Four les quadrimoteurs: \\ K_7 = -3.83 \quad K_3 = 1.84 \, 10^{-4} \quad K_7 = 2.98 \\ \\ Four les quadrimoteurs: \\ K_8 = -6.17 \quad K_6 = -2.43 \, 10^{-4} \quad K_7 = 2.98 \\ \\ Four les quadrimoteurs: \\ K_8 = -6.17 \quad K_6 = -2.43 \, 10^{-4} \quad K_7 = 2.98 \\ \\ Four les quadrimoteurs: \\ Four les quad$$

Lorsque la vitesse de sécurité au décollage est non contrainte $V_2 > V_{2min}$, chacune des grandeurs peut être modélisée par :

$$grandeur = \left(K_{1}\frac{m}{S} + K_{2}\frac{F_{0}}{mg} + K_{3}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{4}\right)f^{2} + \left(K_{5}\frac{m}{S} + K_{6}\frac{F_{0}}{mg} + K_{7}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{8}\right)f + \left(K_{9}\frac{m}{S} + K_{10}\frac{F_{0}}{mg} + K_{11}\frac{m}{S}\frac{F_{0}}{mg} + K_{12}\right)$$

```
Pour nz_{AEO} de bimoteurs : K_2 = -1.32 \, 10^{-4} K_3 = 2.30 \, 10^{-5} K_4 = 3.17 \, 10^{-4} K_6 = 5.01 \, 10^{-4} K_7 = -5.01 \, 10^{-4} K_{10} = 2.05 \, 10^{-3} K_{11} = -2.52 \, 10^{-4} K_{12} = 1.129 Pour nz_{AEO} de quadrimoteurs : K_2 = -3.12 \, 10^{-4} K_3 = 1.69 \, 10^{-5} K_4 = 3.17 \, 10^{-4}
K_9 = 9.76 \cdot 10^{-4}
                             K_1 = -2.79 \ 10^{-6}
K_5 = 3.68 \, 10^{-5}
K_9 = 4.56 \, 10^{-4}
K_1 = -1.97 \ 10^{-6}
K_5 = 2.60 \cdot 10^{-5}

K_9 = 1.07 \cdot 10^{-4}
K_1 = -1.75 \cdot 10^{-6}

K_5 = 2.54 \cdot 10^{-5}
K_9 = 8.50 \, 10^{-5}
K_1 = -3.20 \ 10^{-6}

K_5 = -1.75 \ 10^{-5}
K_9 = 5.32 \, 10^{-4}
K_1 = -1.54 \ 10^{-6}

K_5 = -1.66 \ 10^{-5}
K_9 = 9.82 \cdot 10^{-4}
                              K_1 = -1.90 \ 10^{-4}

K_5 = 3.01 \ 10^{-3}
K_9 = 2.15 \, 10^{-2}
K_1 = -3.02 \ 10^{-5}
K_5 = 1.42 \, 10^{-4}
K_9 = 9.40 \ 10^{-3}
```

Détail des erreurs relative moyenne de notre modèle par rapport aux simulations numériques :

Les bimoteurs

Les vitesses	$Er_{moy\%}$
V_{S1}	0.00 %
V_{EF}	0.13~%
V_1	0.13~%
V_R	0.12~%
V_{LOFAEO}	0.12~%
V_{LOFOEI}	0.09~%
V_2	0.00 %

Décollage sans panne moteur (AEO)				
Les Longueurs $Er_{moy\%}$ Les temps I				
$de 0 \ a V_R$	0.29 %	$de 0 à V_R$	0.15~%	
de V_R à V_{LOF}	2.31~%	$\text{de } V_R \text{ à } V_{LOF}$	2.54~%	
Total Roulage L_{p_T}	0.57~%	Total Roulage t_{p_r}	0.32 %	
Phase aérienne $L_{p_{air}}$	0.18 %	Phase aérienne $t_{p_{\text{air}}}$	3.96 %	
Total Décollage AEO L_p	0.49 %	Total Décollage AEO t_p	0.59~%	

Décollage avec panne moteur (OEI)			
Les Longueurs	$Er_{moy\%}$	Les temps	$Er_{moy\%}$
de 0 à V_{EF}	0.30 %	de 0 à V_{EF}	0.17~%
$\text{de } V_{EF} \text{ à } V_R$	2.58~%	$\text{de }V_{EF} \text{ à }V_{R}$	2.56 %
de V_R à V_{LOF}	0.47~%	$\text{de } V_R \text{ à } V_{LOF}$	0.67~%
Total Roulage L_{p_T}	0.31 %	Total Roulage t_{p_r}	0.18 %
Phase aérienne $L_{p_{air}}$	0.49 %	Phase aérienne $t_{p_{\text{air}}}$	0.58~%
Total Décollage OEI L_p	0.26 %	Total Décollage OEI t_p	0.16 %

Décollage interrompu avec panne moteur (RTO)			
Les Longueurs	$Er_{moy\%}$	Les temps	$Er_{moy\%}$
de 0 à V_{EF}	0.30 %	$de 0 \ a V_{EF}$	0.17~%
$\text{de }V_{EF} \text{ à }V_1$	1.11~%	$\text{de } V_{EF} \ \text{\'a} \ V_1$	1.81 %
$\text{de } V_1 \text{ à } 0$	0.24~%	$\text{de }V_1 \ \text{\`a} \ 0$	0.13~%
Total Roulage L_{p_r}	0.28~%	Total Roulage t_{p_r}	0.15~%
Total RTO L_p	0.27~%	Total RTO t_p	0.14 %

REMARQUE 8.1 Les vitesses caractéristiques du décollage ont été modélisées par des rapports de vitesses. Par conséquent, l'erreur d'estimation d'une vitesse $V_i = \frac{V_i}{V_j} \frac{V_j}{V_{S1}} V_{S1}$ est entachée de l'erreur d'estimation de la vitesse V_j due à l'erreur du modèle de $\frac{V_j}{V_{S1}}$ (sachant que V_{S1} est obtenue analytiquement). C'est le cas par exemple pour estimer la vitesse de décision V_1 . Alors que l'erreur relative moyenne du modèle de $\frac{V_1}{V_R}$ n'est que de 0.05% pour les bimoteurs, la vitesse de décision V_1 est estimée à 0.13%. Ceci est due au cumul de l'erreur de modélisation de $\frac{V_1}{V_R}$ (0.05%) et de $\frac{V_R}{V_{S1}}$ (0.12%).

REMARQUE 8.2 L'erreur de la longueur de piste au roulage d'un décollage interrompu (RTO) et l'erreur de la longueur totale RTO ne sont pas identiques car pour obtenir la longueur de piste réglementaire totale en RTO, il faut ajouter la distance qui serait parcourue durant 2 secondes à la vitesse V_1 (cf.FAR 25.109).

Les quadrimoteurs

Les vitesses	$Er_{moy\%}$
V_{S1}	0.00 %
V_{EF}	0.36~%
V_1	0.35~%
V_R	0.36~%
V_{LOFAEO}	0.12~%
V_{LOFOEI}	0.09~%
V_2	0.00 %

Décollage sans panne moteur (AEO)			
Les Longueurs $Er_{moy\%}$ Les temps $Er_{moy\%}$			$Er_{moy\%}$
$de 0 \ a V_R$	0.83~%	$de 0 à V_R$	0.44 %
$\operatorname{de} V_R \ \text{à} \ V_{LOF}$ 3.39 %		$\det V_R \ a \ V_{LOF}$	3.79 %
Total Roulage L_{p_r}	0.94 %	Total Roulage t_{p_r}	0.56~%
Phase aérienne $L_{p_{\text{air}}}$	0.42~%	Phase aérienne $t_{p_{air}}$	2.39 %
Total Décollage AEO L_p	0.82~%	Total Décollage AEO t_p	0.69 %

Décollage avec panne moteur (OEI)			
Les Longueurs	$Er_{moy\%}$	Les temps	$Er_{moy\%}$
$de 0 \ a V_{EF}$	0.83~%	de 0 à V_{EF}	0.45 %
$\text{de }V_{EF} \text{ à }V_{R}$	4.73~%	$\text{de }V_{EF} \text{ à }V_{R}$	4.44~%
de V_R à V_{LOF}	2.45~%	de V_R à V_{LOF}	2.92 %
Total Roulage L_{p_r}	0.80 %	Total Roulage t_{p_r}	0.49 %
Phase aérienne $L_{p_{air}}$	0.34~%	Phase aérienne $t_{p_{air}}$	0.40~%
Total Décollage OEI L_p	0.67~%	Total Décollage OEI t_p	0.44 %

Décollage interrompu avec panne moteur (RTO)			
Les Longueurs	$Er_{moy\%}$	Les temps	$Er_{moy\%}$
de 0 à V_{EF}	0.83~%	$de 0 \ a V_{EF}$	0.45~%
$\text{de }V_{EF} \ \text{à} \ V_1$	1.32~%	$\text{de }V_{EF} \text{ à }V_{1}$	1.77~%
$\text{de }V_1 \text{ à }0$	0.68~%	$\text{de } V_1 \text{ à } 0$	0.32~%
Total Roulage L_{p_r}	0.77 %	Total Roulage t_{p_T}	0.40 %
Total RTO L_p	0.74~%	Total RTO t_p	0.38~%

Troisième partie

Les annexes

Annexe A

Précision sur le roulage

naire	
-	pratique : Quel roulage pour décoller/atterrir? 245
A.1.1	Analyse de la modélisation de l'accélération Γ
A.1.2	Signe du discriminant Δ
	Approche physique
4.0. D4	Approche numérique
	nonstration de la résolution temporelle
A.2.1	Vitesse au roulage V
A.2.2	Distance de roulage ΔX
A.2.3	Conclusion : résolution temporelle
	érence entre les résolutions temporelle et cinétique 261
	dication numérique à l'A300
	lèles du coefficient de frottement pneu/piste μ 272
A.5.1	Modèles existants du coefficients de frottement pneu/piste 272
	Modèle d'Attilio Lausetti :
	Modèle de l'ESDU
	Modèle de la norme FAR 25.109
	Modèle de DIN (Deutsches Institut für Normung) 281
	Modèle d'Andreau
	Modèle de T.Gillespie
	Modèle de l'ITS (Institute of Technology in Stuttgart) 284
	Modèle de l'University of Michigan Transportation Research
4 7 0	Institute
A.5.2	Confrontation des modèles existants et élaboration d'un modèle à partir de celui d'A.Lausetti
	Coefficient de frottement pneu/piste au freinage $\mu_f(V)$
	Coefficient de frottement pneu/piste au nemage $\mu_f(V)$ 288
	Coefficient de nottement pneu/piste en roue note $\mu_r(v)$ 288 Conclusion : Modèle proposé du coefficient de frottement pneu/piste
	Conclusion : Modele propose du coefficient de nottement plieu/ piste $\mu(V)$
A.6 Mod	lèle simple à accélération moyenne du roulage 294
A.6.1	Expression analytique du modèle simple à accélération moyenne
11.0.1	du roulage
A 6.2	Quelle accélération movenne considérer? 294

 $\rm A.6.3~$ Conclusion : modèle simple du roulage à accélération constante 297

A.1 En pratique : Quel roulage pour décoller/atterrir?

Le but de cette section est de donner les outils nécessaires à la bonne application et compréhension des modèles de roulage que nous proposerons dans les sections suivantes. C'est pourquoi, nous commencerons par une analyse de la modélisation adoptée de l'accélération $\Gamma = AV^2 + BV + C$, et du signe du discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$, pour le cas de coefficients A, B, C constants, ce qui est le cas d'une modélisation de poussée maximale $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 V + q_2 V^2\right)$, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et une incidence au roulage constante $\alpha_r = cte$.

A.1.1 Analyse de la modélisation de l'accélération Γ

L'accélération avion Γ est modélisée (Equation 6.4, p. 120) par un polynôme d'ordre 2 en V. En notant le discriminant $\Delta=B^2-4AC$, elle peut également s'écrire sous la forme :

$$\begin{split} \Gamma &= AV^2 + BV + C \\ &= AV^2 + BV + \frac{B^2 - B^2 + 4AC}{4A} \\ &= AV^2 + \frac{B^2}{4A} + BV - \frac{\Delta}{4A} \\ &= A\left(V^2 + \frac{B^2}{4A^2} + 2V\frac{B}{2A}\right) - \frac{\Delta}{4A} \\ &= A\left(V + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{\Delta}{4A} \\ &= A\left(V - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min} \end{split}$$

Si l'on trace l'évolution de l'accélération Γ en fonction de la vitesse V, on obtient une parabole (Figure A.1, p. 246).

Le paramètre d'ouverture de la parabole est A. Plus A est grand, plus la parabole se referme sous forme de U. Au contraire, plus A est proche de zéro, plus la parabole s'aplatit. Si A est positif alors la parabole est ouverte vers le haut, c'est-à-dire que lorsque la vitesse croît, l'accélération commence par décroître jusqu'à la vitesse $V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}$, puis croît ensuite. Et inversement si A est négatif, la parabole est ouverte vers le bas.

La courbe représentative de l'accélération coupe l'axe des ordonnées en C qui représente l'accélération à vitesse nulle $C = \Gamma(V = 0)$. Le coefficient sera donc par définition, toujours positif pour le cas de l'accélération d'un décollage, et toujours négatif au freinage d'un atterrissage ou d'un décollage interrompu.

Le minima (ou maxima si A < 0) de la parabole est $\Gamma_{min} = -\frac{\Delta}{4A}$, correspondant à la vitesse $V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}$.

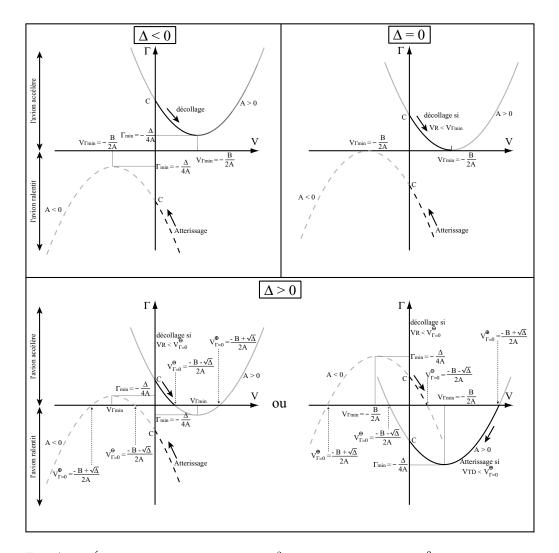


Fig. A.1 – Évolution de l'accélération $\Gamma = AV^2 + BV + C = A\left(V - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$ en fonction de la vitesse pour les différents discriminants $\Delta = B^2 - 4AC$. Les courbes en pointillées sont celles où A < 0. Pour cette figure, le coefficient $B = q_1$ \widetilde{F} a été pris négatif ce qui est en pratique le cas (car $q_1 < 0$ et $\widetilde{F} > 0$ puisque, même à l'atterrissage, on n'utilise pas la reverse pour la certification). Les parties de courbes en gris, sont les domaines physiquement inintéressant pour assurer un roulage pour décoller ou atterrir.

Cas du discriminant $\Delta < 0$:

Si le discriminant $\Delta=B^2-4AC<0$ est négatif, cela veut dire que le polynôme de l'accélération Γ n'admet pas de racines réelles (Figure A.1, p. 246). Autrement dit, il n'y a pas de valeur de vitesse V pour laquelle $\Gamma=0$. Donc soit l'avion accélère $\Gamma>0$ si A>0, soit l'avion ralentit $\Gamma<0$ si A<0.

Pour le décollage, A>0, l'avion entame sa phase de roulage à l'arrêt et dispose d'une accélération initiale $C=\widetilde{F}_{0r}-\widetilde{f}_{rr}>0$. Puisque quelle que soit la vitesse, l'accélération de l'avion restera strictement positive alors l'avion pourra effectuer son roulage jusqu'à V_R en toute sécurité.

Pour l'atterrissage, l'avion entame sa phase de roulage à V_{TD} , vitesse où toutes ses roues touchent la piste. Dans le cas d'un discriminant $\Delta < 0$ et A < 0, l'accélération reste toujours strictement négative, assurant un freinage jusqu'à arrêt complet de l'avion en toute sécurité $(C = \widetilde{F_{red}}_f - \widetilde{f_r}_f < 0)$.

Cas du discriminant $\Delta = 0$:

Si le discriminant $\Delta=B^2-4AC=0$ est nul, alors cela veut dire que le polynôme de l'accélération Γ admet une racine double $-\frac{B}{2A}$ qui correspond au minima $V_{\Gamma_{min}}$ (ou maxima si A<0) de la parabole (Figure A.1, p. 246). Donc l'accélération est toujours, soit positive ou nulle si A>0, soit négative ou nulle si A<0.

Pour le roulage au décollage, on cherche à avoir une accélération strictement positive depuis la vitesse initiale nulle en début de piste, jusqu'à la vitesse de rotation V_R . Comme $B=q_1$ $\widetilde{F_0}_r<0$ car $q_1<0$, ceci n'est assuré que si $V_R\leq V_{\Gamma_{min}}$.

Si jamais la vitesse de rotation V_R était supérieure à $V_{\Gamma_{min}}$ alors l'avion accélérerait jusqu'à $V = V_{\Gamma_{min}}$ puis resterait à vitesse constante. Le pilote verrait son indicateur de vitesse figé à $V = V_{\Gamma_{min}}$ et la piste défiler sous ses yeux dangereusement, sans jamais être capable d'atteindre la vitesse de rotation V_R . L'avion serait donc incapable de décoller et cela aboutirait à une catastrophe. Donc pour assurer un décollage en toute sécurité, il faut au moins s'assurer que $V_R \leq V_{\Gamma_{min}}$.

Pour l'atterrissage, A < 0, si l'avion n'utilise pas d'inverseur de poussée alors on a toujours B < 0, et donc il n'y a pas de problème, l'accélération est toujours strictement négative (de V_{TD} à V = 0), ce qui fait que l'avion peut s'arrêter en toute sécurité. Dans le cas contraire, B > 0, l'avion ne peut atterrir que si $V_{TD} < V_{\Gamma_{min}}$.

Cas du discriminant $\Delta > 0$:

Si le discriminant $\Delta=B^2-4AC>0$ est positif, alors cela veut dire que le polynôme de l'accélération Γ admet 2 racines $V_{\Gamma=0}^{\ominus}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V_{\Gamma=0}^{\oplus}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$. L'accélération change de signe selon la valeur de la vitesse par rapport à ces deux racines.

Pour le décollage, il faut pouvoir envisager une configuration de roulage qui permette de passer de la vitesse initiale nulle V=0 à la vitesse de rotation V_R en ayant une accélération toujours strictement positive. Pour B>0 ce qui est le cas au décollage, ceci n'est envisageable que pour C>0 et $V_R\leq V_{\Gamma=0}^{\ominus}$.

REMARQUE A.1 Le coefficient $C=\widetilde{F_{0r}}-\widetilde{f_{rr}}$, est effectivement positif au décollage pour les avions de transport civil. Ce type d'avion a en moyenne un rapport poussée sur poids $\frac{F_0}{mg}$ de 0.31 pour les bimoteurs, 0.25 pour les trimoteurs et 0.21 pour les quadrimoteurs [Boi01a], ce qui revient à une poussée réduite $\widetilde{F_{0r}}$ de l'ordre de 2 à 3. La piste a un coefficient de frottement pneu/piste de l'ordre de $\mu_r \approx 0.015$. Ce qui fait qu'en général

$$\frac{F_0}{mg} > \mu_r$$

$$\frac{F_0}{m} - \mu_r g > 0$$

$$\widetilde{F_0}_r - \widetilde{f}_{r_r} > 0$$

Ce qui assure que l'accélération à vitesse nulle soit positive C>0. Même pour des pistes herbeuses avec des pneus de moins bonnes qualités, où le coefficient de frottement au roulage μ_r peut devenir plus important ($\mu_r\approx 0.06$), le frottement statique réduit reste bien inférieur à la poussée réduite même avec une panne moteur. L'avion sera donc toujours capable de décoller dans le cas $\Delta>0$.

Pour l'atterrissage avec $\Delta>0$, le raisonnement est encore plus simple puisque la poussée réduite \widetilde{F}_{redf} est quasi-nulle (les moteurs sont mis au ralenti), et le frottement statique réduit \widetilde{f}_{rf} est maximale (puisque l'avion freine). Par conséquent, l'accélération à vitesse nulle est bien négative : $C=\widetilde{F}_{redf}-\widetilde{f}_{rf}$

Pour l'atterrissage, il faut pouvoir envisager une configuration de roulage qui permette de passer de la vitesse de toucher de toutes les roues V_{TD} à l'arrêt de l'avion V=0 en ayant une accélération toujours strictement négative. Pour B>0 ce qui est le cas si on n'utilise pas d'inverseur de poussée, ceci n'est envisageable que pour C<0 et soit A<0, soit A>0 et $V_R\leq V_{\Gamma=0}^{\oplus}$.



Fig. A.2 – Atterrissage de la Caravelle (SE-210 Caravelle III d'AirFrance) à Stockholm en 1971. La sortie d'un parachute permet d'aider l'avion à décélérer en augmentant la traînée. C'est un dispositif plus fréquemment utilisé sur les avions de combat. photo : Lars Söderström

Cas envisageables pour décoller/atterrir :

Les phases de roulage envisageables pour un décollage ou un atterrissage, que nous venons de répertoriées, sont (dans le cas de B < 0) :

Pour accélérer pour le décollage :

- Discriminant $\Delta < 0, A > 0$
- Discriminant $\Delta = 0, A > 0,$ et $V_R < V_{\Gamma_{min}} = -\frac{B}{2A}$
- Discriminant $\Delta > 0$, A > 0, C > 0, et $V_R < V_{\Gamma=0}^{\ominus} = \frac{-B \sqrt{\Delta}}{2A}$ Discriminant $\Delta > 0$, A < 0, C > 0, et $V_R < V_{\Gamma=0}^{\ominus} = \frac{-B \sqrt{\Delta}}{2A}$ Nous verrons qu'en pratique, c'est le cas réel du décollage.

Pour freiner à l'atterrissage ou en RTO:

- Discriminant $\Delta < 0$, A < 0. Nous verrons qu'en pratique, c'est le cas réel d'un décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) sur piste très glissante et avec des spoilers efficaces.
- Discriminant $\Delta = 0$, A < 0
- Discriminant $\Delta > 0, A < 0, C < 0$
- Discriminant $\Delta > 0, A > 0, C < 0$, et $V_{TD} < V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$ pour freiner à l'atterrissage, et $V_1 < V_{\Gamma=0}^{\oplus}$ pour pouvoir effectuer un décollage interrompu (RTO) si besoin est. Nous verrons qu'en pratique, ce sont les cas réels d'atterrissage et de décollage interrompu avec de faibles spoilers et avec une bonne capacité de freinage.

Remarque A.2 Dans les résolutions (Section 6.4, p. 131) et (Section 6.5, p. 136) de roulage que nous vous proposerons dans les sections suivantes, nous verrons que les solutions proposées pour $\Delta > 0$, sont définies différemment selon que la vitesse initiale de roulage est comprise ou non entre les racines $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$.

Pour faire le lien avec ces différents cas d'études des expressions analytiques de la distance au roulage, il suffit de reprendre la contrainte sur V_R . Pour les cas de décollage :

si
$$0 \le V \le V_R < \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$$
 et $A > 0$ alors $\frac{2AV + B}{\sqrt{\Delta}} < -1$
si $0 \le V \le V_R < \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$ et $A < 0$ alors $-1 < \frac{2AV + B}{\sqrt{\Delta}} < \frac{B}{\sqrt{\Delta}} < 0 < 1$

Pour le cas de l'atterrissage :

si
$$0 \le V \le V_{TD} < \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$$
 et $A > 0$ alors $\frac{2AV + B}{\sqrt{\Delta}} < 1$ or si en plus $C < 0$ on a $\frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} < 0 \le V$ alors $-1 < \frac{2AV + B}{\sqrt{\Delta}} < 1$

Ceci permet de choisir le cas correspondant de nos résolutions cinétique et temporelle dont la définition diffère selon le domaine de définition de $\frac{2AV+B}{\sqrt{\Lambda}}$.

Un certain nombre de cas de figure ont déjà été éliminés car ils ne permettent pas de décoller/atterrir en toute sécurité. Néanmoins, il est difficile de déterminer le cas de figure valable pour tous les avions, donc une unique relation donnant la longueur de piste au roulage.

Le raisonnement peut-être poursuivi pour déterminer les cas pratiques de roulage, par une approche numérique des coefficients A,B,C, pour des avions de transport civil. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

A.1.2 Signe du discriminant Δ

Nous venons déjà de limiter le nombre de solutions mathématiques envisageables pour le roulage au décollage et à l'atterrissage. Cependant il reste encore beaucoup de cas envisageables mathématiquement. Dans ce paragraphe, nous allons déterminer quel est, en pratique, le signe du discriminant, en raisonnant à l'aide des ordres de grandeurs possibles des coefficients A, B, C, pour des avions de transport civil. Une première approche physique est d'abord faite par rapport à l'expression analytique du discriminant. Une deuxième approche est faite par balayage numérique des caractéristiques d'avions fictifs, représentatives d'avions de transport civil. Ceci nous permettra de déterminer quel est le signe du discriminant, donc quelle sera la solution analytique du roulage à utiliser, dans les cas de décollage, atterrissage et décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off).

Approche physique

Tentons de déterminer le signe du discriminant Δ , en raisonnant à partir de son expression analytique et en séparant le cas de décollage et d'atterrissage.

Le décollage : Pour décoller, il faut forcément que l'accélération à vitesse nulle soit positive, ce qui revient à dire que le coefficient C>0 est positif. Par ailleurs, le coefficient $A=q_2$ $\widetilde{F_0}_r-\widetilde{T}_r$ est généralement négatif puisque, nous l'avons vu précédemment, la traînée réduite en roulage est de l'ordre de $\widetilde{T}_r\approx 5\,10^{-5}$, la poussée réduite est au roulage $\widetilde{F_0}_r$ de l'ordre de 2 à 3, et, pour des moteurs d'avions de transport civil le coefficient q_2 est de l'ordre de $2.5\,10^{-6}$ à $3.5\,10^{-6}$. Le discriminant est donc généralement positif, puisque le produit AC<0 est généralement négatif.

$$\Delta = \underbrace{B^2}_{>0} - 4 \underbrace{A}_{<0} \underbrace{C}_{>0} > 0$$

Nous pouvons donc déduire que pour les phases de roulage d'accélération au décollage, le discriminant est généralement positif $\Delta>0$. Nous avons fait ce raisonnement en considérant l'ordre de grandeur d'avion de transport civil moyen, mais nous verrons dans la section suivante, par une approche numérique simulant l'ensemble des avions de transport civil possibles, qu'effectivement le discriminant est toujours positif au décollage.

Le freinage d'un atterrissage ou d'un décollage interrompu : Pour freiner, le pilote actionne bien évidemment les freins ce qui augmente considérablement le coefficient de frottement pneu/piste μ_f , mais la poussée des moteurs est également réduite ce qui se traduit par une poussée réduite très faible $\widehat{F_{red}}_f \approx 0$. Ceci permet de simplifier l'expression du discriminant :

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$= \left(q_1 \widetilde{F_{redf}}\right)^2 - 4\left(q_2 \widetilde{F_{redf}} - \widetilde{T}_f\right) \left(\widetilde{F_{redf}} - \widetilde{f}_{rf}\right)$$

$$\approx -4 \widetilde{T}_f \widetilde{f}_{rf}$$

Comme par définition le frottement statique réduit \tilde{f}_{rf} est positif, alors le discriminant Δ est du signe de l'opposé de la traînée réduite $-\tilde{T}_f$. En reprenant la définition de la

traînée réduite :

$$\widetilde{T} = \frac{1}{2}\rho \frac{S}{m} (Cx - \mu Cz)$$
$$= \frac{1}{2}\rho \frac{S}{m} Cx (1 - \mu f)$$

Avec la finesse au décollage $f = \frac{Cz}{Cx}$.

Puisque $\frac{1}{2}\rho \frac{S}{m}Cx > 0$, on en déduit (Figure A.3, p. 252) que le discriminant Δ est du signe de $\mu f - 1$.

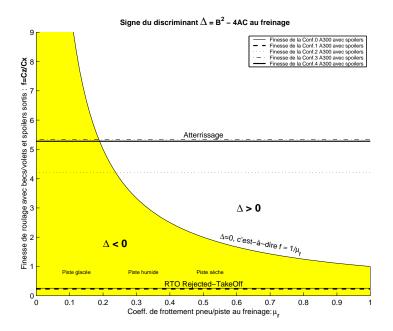


FIG. A.3 – Lors du freinage, la poussée est mise au ralenti. Si on la néglige, le signe du discriminant Δ dépend alors du signe de $\mu_f f - 1$ avec la finesse de roulage f (selon la configuration de becs et volets adoptée et avec les spoilers), et le coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f .

La finesse de l'avion en configuration de freinage va évidemment dépendre de l'efficacité des spoilers dont il dispose, mais également de la configuration becs/volets choisis. Ainsi, la finesse sera différente selon que l'avion est en configuration d'atterrissage ou de décollage (pour le cas du freinage d'un décollage interrompu ou Rejected-Takeoff RTO).

Nous verrons dans le paragraphe qui suit, qu'en fait, le discriminant est généralement de signe positif au freinage de l'atterrissage car l'hypersustentation est forte (tous les becs/volets sont sortis) mais au contraire, est de signe négatif au freinage d'un décollage interrompu car l'hypersustentation est faible.

Approche numérique

En raisonnant sur les valeurs plausibles des paramètres d'entrée du modèle de roulage, pour les avions de transport civil, nous arrivons à déterminer la plage de variation des coefficients A, B, C et par conséquent, du discriminant Δ . Les variables utilisées dans le

modèle de roulage sont listées ci-dessous, ainsi que leur plage de variation envisagée qui est représentative d'avions de transport civil.

Taux de poussée moteur	:	$\frac{F_0}{mq}$	\in	0.20	0.35]
Taux de dilution moteur civil	:	λ	\in	3 ;	6]
Taux de compression moteur civil	:	$arepsilon_c$	\in	20	40]
Température d'entrée turbine moteur civil (K)) :	T_4	\in	1400	1600]
Coefficient modèle moteur civil d'après notre	:			$\left[-23710^{-5}\right]$	
modèle moteur [Rou02] (fonction de $\lambda, T_4, \varepsilon_c$)) :	q_2	\in	$2.56 10^{-6}$	3.4310^{-6}]
Coeff. de frottement pneu/piste : roue libre	:	μ_r	\in	0.01	0.04]
Coeff. de frottement pneu/piste : freinage	:	μ_f	\in	0.4	1]
Charge alaire	:	$\frac{M_{MTOW}}{S}$	\in	480	720]
Allongement voilure	:	$ ilde{\lambda}$	\in	7 ;	10]
Coeff. de portance due aux spoilers	:	$\Delta C z_{oSP}$	\in	-0.5	0]
Coeff. de traînée de frottement des spoilers	:	ΔCx_{oSP}	\in	0.042	0.078]
Gradient de portance	:	$Cz\alpha =$	$\frac{2\pi}{1+\frac{2\pi}{3}}$	<u>.</u>	
Coeff. de traînée induite		$k_i = \frac{1}{\pi \lambda}$. ,		
Coeff. de traînée de frottement du train		7/ 7/		= 0.0175	
Coeff. de traînée du moteur en panne	:	ΔCx_{om}	ouli	$_{net} = 0.004$	
Poussée au ralenti		$F_{red} =$			

Le taux de poussée $\frac{F_0}{mg}$ des avions de transport civil [Boi01a] est de l'ordre de 0.31 pour les bimoteurs, de 0.25 pour les trimoteurs, et de 0.21 pour les quadrimoteurs. C'est pourquoi nous considérons une plage de variation de 0.2 à 0.35.

Comme le montre notre base de données moteurs [Rou02], les réacteurs d'avions civil, ont généralement un fort taux de dilution λ (entre 3 et 6), une température d'entrée turbine conceptuelle T_4 entre 1400 et 1600 ° K, et un taux de compression (Overall Pressure Ratio) ε_c entre 20 et 40. En utilisant le modèle moteur que nous avons mis au point [Rou02], qui est fonction de ces paramètres moteurs $(\lambda, T_4, \varepsilon_c)$, nous pouvons déterminer la plage de variation des coefficients q_1 et q_2 (Equation 6.3, p. 119) pour l'ensemble de ces moteurs fictifs représentatifs des moteurs civil plausibles. Notre modèle de poussée moteur maximale [Rou02] au sol est de la forme :

$$\frac{F_{max}(h = 0m, M)}{F_0} = \alpha (M - M_s)^2 + \overline{F_m}$$

$$= \alpha M^2 - 2\alpha M_s M + \underbrace{\alpha M_s^2 + \overline{F_m}}_{=1 \text{ par définition}}$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha}{a^2} V^2 + \frac{-2\alpha M_s}{a_1} V + 1}_{q_1}$$

Ce qui nous permet de déduire, pour les moteurs d'avions de transport civil, l'encadrement des coefficients du modèle moteur (Equation 6.3, p. 119) : $-237\ 10^{-5} \le q_1 \le -172\ 10^{-5}$ et $2.56\ 10^{-6} \le q_1 \le 3.43\ 10^{-6}$.

En considérant ces plages de variations pour les avions de transport civil, on balaye tous les cas extrêmes pour chaque configuration de becs/volets, au freinage ou en roue libre, avec ou sans spoilers, avec ou sans poussée (maximale ou au ralenti).

Pour le décollage (poussée maximale, en roue libre, sans spoilers), quelle que soit la configuration de becs et volets, le discriminant est toujours positif : valeur minimale trouvée $\Delta=1.44\ 10^{-4}$ et valeur maximale $\Delta=29\ 10^{-4}$. Les simulations numériques de

tous ces avions de transport civil fictifs, montrent que le discriminant est toujours positif $\Delta > 0$ lors du décollage.

Pour le freinage, nous avions déterminé (Figure A.3, p. 252), par un raisonnement physique simple, que le signe du discriminant était semblable à celui de $f\mu_f-1$. La finesse f dépend des spoilers mais aussi de la configuration des becs/volets, et cela se confirme numériquement. Au freinage, les simulations numériques montrent que le signe du discriminant dépend essentiellement de la sortie des dispositifs d'hypersustentation. Lorsque l'hypersustentation est grande, ce qui est le cas à l'atterrissage, le discriminant est positif $\Delta > 0$. En cas de freinage avec peu d'hypersustentation sortie, c'est-à-dire pour le freinage lors d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO), il est généralement négatif $\Delta < 0$. Pour une sortie intermédiaire des hypersustentateurs, le signe du discriminant dépend de l'efficacité des spoilers, de la dégradation de la finesse qu'engendre leur déploiement. Mais une telle configuration, n'est pas utilisée ni à l'atterrissage, ni au décollage. Donc, retenons que généralement, le discriminant est positif à l'atterrissage et négatif en cas de freinage d'un décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO).

CE QU'IL FAUT RETENIR A.1 Le discriminant $\Delta=B^2-4AC$ du polynôme représentatif de l'accélération $\Gamma=AV^2+BV+C$, est en pratique toujours positif au décollage et à l'atterrissage pour les avions de transport civil. En général, il est négatif au freinage d'un décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off).

REMARQUE A.3 Pour que le décollage soit possible, il faut que la vitesse de décollage V_{LOF} soit inférieure à la vitesse d'accélération nulle $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$, ce qui est le cas. En effet, prenons la définition de $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$, c'est la vitesse où l'accélération s'annule : $\Gamma(V=V_{\Gamma=0}^{\ominus})=0$ Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & F_{max}\left(\cos\alpha_r + \mu_r\sin\alpha_r\right) - \frac{1}{2}\rho SV_{\Gamma=0}^{\ominus}{}^2\left(Cx - \mu_rCz\right) - \mu_r mg \\ V_{\Gamma=0}^{\ominus} & = & \sqrt{\frac{F_{max}\left(\cos\alpha_r + \mu_r\sin\alpha_r\right) - \mu_r mg}{\frac{1}{2}\rho S\left(Cx - \mu_rCz\right)}} \\ & \text{or } mg & = & \frac{1}{2}\rho SV_{S1}^2Cz_{max} \\ \left(\frac{V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{V_{S1}}\right)^2 & = & \frac{\frac{F_{max}}{mg}\left(\cos\alpha_r + \mu_r\sin\alpha_r\right) - \mu_r}{Cx - \mu_rCz}Cz_{max} \\ & \text{avec } \alpha_r = 0, \; \left(\frac{V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{V_{S1}}\right)^2 & = & \frac{\frac{F_{max}}{mg} - \mu_r}{Cx - \mu_rCz}Cz_{max} \end{array}$$

Or, on connaît l'ordre de grandeur du taux de propulsion $\frac{F_{max}}{mg} \approx 0.31$. Pour les différentes configuration becs/volets de l'A300, et pour un coefficient de frottement pneu/piste moyen de $\mu_r = 0.015$, on obtient :

Conf.	0	1	2	3	4
$\frac{V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{V_{S1}}$	3.45	3.4	3.34	3.07	2.37

Comme la norme FAR 25 impose une vitesse de décollage de l'ordre de 1.1 V_{mu} (minimum unstick speed, du même ordre de grandeur que la vitesse de décrochage $V_{mu} \approx 0.93 V_{S1}$), alors il n'y a pas de difficultés à vérifier le fait que la vitesse de décollage soit inférieure à la vitesse d'accélération nulle $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$:

$$V_{LOF} < V_{\Gamma=0}^{\ominus}$$

Remarque A.4 Pour que l'atterrissage soit envisageable, il faut que la vitesse de toucher des roues V_{TD} soit inférieure à la vitesse d'accélération nulle $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$, ce qui est le cas. En effet, la définition de $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$ permet d'écrire $\Gamma(V=V_{\Gamma=0}^{\oplus})=0$, c'est-à-dire :

$$0 = -\frac{1}{2}\rho S V_{\Gamma=0}^{\oplus 2} (Cx - \mu_f Cz) - \mu_f mg$$

$$V_{\Gamma=0}^{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_f mg}{-\frac{1}{2}\rho S (Cx - \mu_f Cz)}}$$
or $mg = \frac{1}{2}\rho S V_{S1}^2 Cz_{max}$

$$\left(\frac{V_{\Gamma=0}^{\oplus}}{V_{S1}}\right)^2 = \frac{\mu_f}{\mu_f Cz - Cx} Cz_{max}$$

Pour les différentes configuration becs/volets de l'A300, et pour un coefficient de frottement pneu/piste moyen de $\mu_f = 0.4$, on obtient :

Co	nf.	0	1	2	3	4
$\frac{V_{\Gamma}^{\oplus}}{V_{S}}$	<u>=0</u>	$(\Delta < 0)$	$(\Delta < 0)$	3.38	2.55	2.24

Comme la norme FAR 25.125.a.2.i impose une vitesse d'atterrissage de l'ordre de 1.23 V_{S1} , la relation

$$V_{TD} < V_{\Gamma=0}^{\oplus}$$

est a priori toujours vérifiée, donc l'atterrissage est toujours possible.

A.2 Démonstration de la résolution temporelle

A.2.1 Vitesse au roulage V

L'expression de la vitesse en fonction du temps V peut être obtenue par la résolution de l'équation différentielle de Riccati (Equation 6.4, p. 120). Pour résoudre une équation différentielle, plusieurs méthodes sont en général proposées dans les ouvrages de mathématiques, pour des formes répertoriées, mais cela devient plus délicat lorsque l'on sort des "sentiers battus". On procède alors à tâtons pour trouver la forme qui conviendrait. Pour les équations différentielles de Riccati, il est conseillé de trouver une solution particulière, et ensuite d'appliquer une méthode décrite dans les ouvrages de mathématiques pour trouver la solution générale. C'est en procédant de la sorte, en cherchant une solution particulière, que j'ai eu la chance de trouver la fonction suivante, qui, et nous le montrerons, constitue en fait la solution générale de l'équation différentielle que nous cherchons à résoudre (Equation 6.4, p. 120) dans le cas de A, B, C constants.

$$V = \begin{cases} a \operatorname{th} (b t + c) + d & \operatorname{si} \Delta > 0 \operatorname{et} -1 \leq \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \leq 1\\ \frac{a}{\operatorname{th}(b t + c)} + d & \operatorname{si} \Delta > 0 \operatorname{et} -1 \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \leq 1\\ -\frac{1}{At + c} - \frac{B}{2A} & \operatorname{si} \Delta = 0 \operatorname{et} V_i \neq -\frac{B}{2A}\\ -\frac{B}{2A} & \operatorname{si} \Delta = 0 \operatorname{et} V_i = -\frac{B}{2A}\\ -a \operatorname{tan} (b t + c) + d & \operatorname{si} \Delta < 0. \end{cases}$$
(A.1)

Avec Δ le discriminant de l'équation de Riccati : $\Delta = B^2 - 4AC$.

 $^{^{1}}$ Si f est solution particulière, alors le changement de fonction y=f+1/z ramène à une équation linéaire, dite de Bernoulli, déterminant z.

Pour que cette fonction satisfasse l'équation différentielle de Riccati (Equation 6.4, p. 120), il faut que les coefficients a, b, d soient égaux à (Appendix D, p. 315) :

$$a = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2A}, \qquad b = -\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}, \qquad d = -\frac{B}{2A}$$
 (A.2)

Par ailleurs, pour qu'elle satisfasse également la condition initiale $V(t_i) = V_i$, il faut que le coefficient c soit égal à :

$$c = \begin{cases} \operatorname{th}^{-1}\left(\frac{V_i - d}{a}\right) - b \, t_i & \text{si } \Delta > 0 \text{ et } -1 \le \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \le 1 \\ \operatorname{th}^{-1}\left(\frac{a}{V_i - d}\right) - b \, t_i & \text{si } \Delta > 0 \text{ et } -1 \le \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i + B} \le 1 \\ -A\left(\frac{2}{2AV_i + B} + t_i\right) & \text{si } \Delta = 0 \\ -\tan^{-1}\left(\frac{V_i - d}{a}\right) - b \, t_i & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous en déduisons que cette fonction est bien la solution. Cette démonstration mathématique est détaillée en annexe (Appendix D, p. 315).

A.2.2 Distance de roulage ΔX

La distance $\Delta X = X - X_i$ de la portion de roulage considérée, est la différence de l'abscisse courante X de l'avion à l'instant t, et de l'abscisse initiale X_i à l'instant initial t_i . L'expression analytique de cette distance ΔX s'obtient par intégration² de la vitesse V(t).

$$\Delta X = X - X_i = \int_{t_i}^{t} V(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

Cas du discriminant $\Delta < 0$

$$\Delta X = \int_{t_i}^t \left(-a \, \tan \left(b \, \tilde{t} + c \right) + d \right) d\tilde{t}$$

$$= -a \int_{t_i}^t \tan \left(b \, \tilde{t} + c \right) d\tilde{t} + d \int_{t_i}^t d\tilde{t} \qquad \text{or} \qquad \int \tan(u) du = -\ln|\cos(u)|$$

$$= \frac{a}{b} \left[\ln|\cos(bt + c)| \right]_{t_i}^t + d(t - t_i)$$

$$= \frac{a}{b} \ln \left| \frac{\cos(bt + c)}{\cos(bt_i + c)} \right| + d(t - t_i)$$

Cas du discriminant $\Delta = 0$

$$\Delta X = \int_{t_i}^t \left(-\frac{1}{A\,\tilde{t} + c} + d \right) d\tilde{t}$$

$$= -\frac{1}{A} \left[\ln\left| A\,\tilde{t} + c \right| \right]_{t_i}^t + d\left(t - t_i\right)$$

$$= -\frac{1}{A} \ln\left| \frac{A\,t + c}{A\,t_i + c} \right| + d\left(t - t_i\right)$$

²Dans cette expression on voit apparaître un \tilde{t} . Ce n'est pas une nouvelle notation du temps mais seulement un artifice mathématique pour intégrer, car la borne supérieure de l'intégrale n'est autre que le temps t.

REMARQUE A.5 Dans le cas de $V_i = -\frac{B}{2A} = d$, l'accélération Γ est nulle, la vitesse est donc constante V = d, et par conséquent la distance au roulage s'exprime par $\Delta X = d(t - t_i)$. Une vitesse constante n'a aucun intérêt pour un avion car dans ce cas, il serait incapable de décoller ou d'atterrir.

Cas du discriminant $\Delta > 0$ et si $-1 \le \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \le 1$

$$\Delta X = \int_{t_i}^t \left(a \operatorname{th} \left(b \, \tilde{t} + c \right) + d \right) d\tilde{t}$$

$$= a \int_{t_i}^t \operatorname{th} \left(b \, \tilde{t} + c \right) d\tilde{t} + d \int_{t_i}^t d\tilde{t} \quad \text{or} \quad \int \operatorname{th}(u) du = \ln|\operatorname{ch}(u)|$$

$$= \frac{a}{b} \left[\ln|\operatorname{ch} \left(bt + c \right)| \right]_{t_i}^t + d \left(t - t_i \right)$$

$$= \frac{a}{b} \ln \left| \frac{\operatorname{ch} \left(bt + c \right)}{\operatorname{ch} \left(bt_i + c \right)} \right| + d \left(t - t_i \right)$$

Cas du discriminant $\Delta > 0$ et si $-1 \le \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i + B} \le 1$

$$\Delta X = \int_{t_i}^t \left(\frac{a}{\operatorname{th}(b\,\tilde{t}+c)} + d \right) d\tilde{t} \quad \text{or} \quad \int \frac{1}{\operatorname{th}(u)} du = \ln|\operatorname{sh}(u)|$$

$$= \frac{a}{b} \left[\ln|\operatorname{sh}(bt+c)| \right]_{t_i}^t + d(t-t_i)$$

$$= \frac{a}{b} \ln\left| \frac{\operatorname{sh}(bt+c)}{\operatorname{sh}(bt_i+c)} \right| + d(t-t_i)$$

Solution temporelle de la distance de roulage ΔX

L'expression de la distance parcourue par un avion au roulage entre le temps t_i et t se regroupe, selon les cas du discriminant Δ , en :

$$\Delta X = d\left(t - t_i\right) + \begin{cases} \frac{a}{b} \ln \left| \frac{\operatorname{ch}(bt + c)}{\operatorname{ch}(bt_i + c)} \right| & \text{si} & \Delta > 0 \text{ et } -1 \le \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \le 1\\ \frac{a}{b} \ln \left| \frac{\operatorname{sh}(bt + c)}{\operatorname{sh}(bt_i + c)} \right| & \text{si} & \Delta > 0 \text{ et } -1 \le \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i + B} \le 1\\ \frac{-1}{A} \ln \left| \frac{A t + c}{A t_i + c} \right| & \text{si} & \Delta = 0 \text{ et } V_i \ne -\frac{B}{2A}\\ \frac{a}{b} \ln \left| \frac{\cos(bt + c)}{\cos(bt_i + c)} \right| & \text{si} & \Delta < 0 \end{cases}$$

Avec les coefficients a, b, c, d définis précédemment (Equation A.2, p. 256).

A.2.3 Conclusion: résolution temporelle

Nous avons démontré la solution de la vitesse de roulage V et de la distance de roulage ΔX par une intégration temporelle, et nous venons de démontrer que cette solution était cohérente avec la solution proposée par la résolution cinétique. Dans le dernier paragraphe de cette section, nous allons mettre en forme cette solution temporelle dont l'expression est donnée par :

Si
$$\Delta > 0$$
 et $-1 \le \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \le 1$,
$$\begin{cases}
V = \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} \operatorname{th} \left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Delta t + c_k \right) - \frac{B}{2A} \\
\Delta X = -\frac{B}{2A} \Delta t - \frac{1}{A} \operatorname{ln} \left| \frac{\operatorname{ch} \left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Delta t + c_k \right)}{\operatorname{ch} (c_k)} \right| \\
c_k = \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \right) \end{cases}$$
Si $\Delta > 0$ et $-1 \le \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i + B} \le 1$,
$$\begin{cases}
V = \frac{\sqrt{\Delta}}{2A \operatorname{th} \left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Delta t + c_k \right)} - \frac{B}{2A} \\
\Delta X = -\frac{B}{2A} \Delta t - \frac{1}{A} \operatorname{ln} \left| \frac{\operatorname{sh} \left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Delta t + c_k \right)}{\operatorname{sh} (c_k)} \right| \\
c_k = \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i + B} \right) \end{cases}$$
Si $\Delta = 0$,
$$\begin{cases}
V = -\frac{1}{A\Delta t + c_k} - \frac{B}{2A} \\
\Delta X = -\frac{B}{2A} \Delta t - \frac{1}{A} \operatorname{ln} \left| \frac{A \Delta t + c_k}{c_k} \right| \\
c_k = -\frac{2A}{2AV_i + B} \end{cases}$$

$$\begin{cases}
V = -\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2A} \operatorname{tan} \left(-\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \Delta t + c_k \right) - \frac{B}{2A} \\
\Delta X = -\frac{B}{2A} \Delta t - \frac{1}{A} \operatorname{ln} \left| \frac{\operatorname{cos} \left(-\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \Delta t + c_k \right)}{\operatorname{cos} (c_k)} \right| \\
c_k = -\operatorname{tan}^{-1} \left(\frac{2AV_i + B}{\sqrt{|\Delta|}} \right) \end{cases}$$

Afin de rendre plus explicites ces expressions, utilisons les notations définies précédemment : de l'accélération minimale $\Gamma_{min}=\frac{-\Delta}{4A}$, de la vitesse correspondante à cette accélération minimale $V_{\Gamma_{min}}=-\frac{B}{2A}$, les racines du polynôme de l'accélération c'est-à-dire les vitesses pour lesquelles l'accélération est nulle (dans le cas d'un discriminant $\Delta>0$) $V^{\oplus}_{\Gamma=0}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ et $V^{\ominus}_{\Gamma=0}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$. La condition sur $\chi=\frac{2AV_i+B}{\sqrt{\Delta}}$ revient à déterminer si oui ou non, la vitesse initiale V_i est comprise entre l'intervalle de vitesse définie par les racines $V^{\ominus}_{\Gamma=0}$ et $V^{\ominus}_{\Gamma=0}$.

Utilisons également les relations trigonométriques [AS74, Zwi96] suivantes :

$$\operatorname{ch}\left(\operatorname{th}^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{sh}\left(\operatorname{th}^{-1}(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{cos}\left(\operatorname{tan}^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ce qui permet d'écrire le modèle final de la résolution temporelle (Table 6.4, p. 138).

Résolution temporelle

de la vitesse V et de la longueur de piste ΔX au roulage pour une accélération avion de la forme

$$\Gamma = AV^2 + BV + C = A\left(V - V_{\Gamma_{min}}\right)^2 + \Gamma_{min}$$

$$\Delta > 0$$

si -1 $\leq \chi \leq 1$, c'est-à-dire V_i comprise entre les racines $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$

$$\begin{cases} V = V_{\Gamma_{min}} + \frac{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{2} \operatorname{th}\left(-\sqrt{-A\Gamma_{min}}\Delta t + \operatorname{th}^{-1}\chi\right) \\ \Delta X = V_{\Gamma_{min}}\Delta t - \frac{1}{A} \ln\left|\operatorname{ch}\left(-\sqrt{-A\Gamma_{min}}\Delta t + \operatorname{th}^{-1}\chi\right)\sqrt{1-\chi^{2}}\right| \end{cases}$$

si $-1 \le \frac{1}{\gamma} \le 1$, c'est-à-dire V_i non comprise entre $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$ et $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$

$$\begin{cases} V = V_{\Gamma_{min}} + \frac{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{2} \frac{1}{\operatorname{th}(-\sqrt{-A\Gamma_{min}}\Delta t + \operatorname{th}^{-1}(\frac{1}{\chi}))} \\ \Delta X = V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln \left| \operatorname{sh}\left(-\sqrt{-A\Gamma_{min}}\Delta t + \operatorname{th}^{-1}\left(\frac{1}{\chi}\right)\right) \sqrt{\chi^2 - 1} \right| \end{cases}$$

$$\begin{cases} V = V_{\Gamma_{min}} - \frac{V_i - V_{\Gamma_{min}}}{\sqrt{1 + V_{\Gamma_{min}}}} \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \qquad \begin{cases} V = V\Gamma_{min} - \frac{1}{(V_i - V\Gamma_{min})A\Delta t - 1} \\ \Delta X = V\Gamma_{min}\Delta t - \frac{1}{A}\ln|1 - (V_i - V\Gamma_{min})A\Delta t| \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \qquad \begin{cases} V = V_{\Gamma_{min}} - \frac{V_i - V_{\Gamma_{min}}}{(V_i - V_{\Gamma_{min}}) A \Delta t - 1} \\ \Delta X = V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln |1 - (V_i - V_{\Gamma_{min}}) A \Delta t| \end{cases}$$

$$\Delta < 0 \qquad \begin{cases} V = V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln |1 - (V_i - V_{\Gamma_{min}}) A \Delta t| \\ \Delta X = V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln |\cos (\sqrt{A \Gamma_{min}} \Delta t + \tan^{-1} \chi) \\ \Delta X = V_{\Gamma_{min}} \Delta t - \frac{1}{A} \ln |\cos (\sqrt{A \Gamma_{min}} \Delta t + \tan^{-1} \chi) \sqrt{1 + \chi^2}| \end{cases}$$

Avec
$$\chi = \sqrt{\left|\frac{A}{\Gamma_{min}}\right|} (V_i - V_{\Gamma_{min}})$$
 si $\Delta > 0$, on a aussi $\chi = 2\frac{V_i - V_{\Gamma_{min}}}{V_{\Gamma=0}^{\oplus} - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}$

$$\begin{array}{lll} \Delta &= B^2 - 4AC & \overline{V}^{\oplus} &= \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\oplus}} & \text{et } \overline{V}^{\ominus} = \frac{V}{V_{\Gamma=0}^{\ominus}} \\ V_{\Gamma=0}^{\oplus} &= \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} & V_{\Gamma_{min}} &= -\frac{B}{2A} \\ V_{\Gamma=0}^{\ominus} &= \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} & \Gamma_{min} &= -\frac{\Delta}{4A} \\ A &= q_2 \ \tilde{F} - \tilde{T} & \tilde{F} &= \frac{F_0}{m} \frac{\rho}{\rho_0} \ (\cos \alpha_r + \mu \sin \alpha_r) \end{array}$$

$$A = q_{2} \tilde{F} - \tilde{T} \qquad \qquad \tilde{F} = \frac{F_{0}}{m} \frac{\rho}{\rho_{0}} (\cos \alpha_{r} + \mu \sin \alpha_{r})$$

$$B = q_{1} \tilde{F} \qquad \qquad \tilde{T} = \frac{1}{2} \rho \frac{S}{m} (Cx - \mu Cz)$$

$$\tilde{f}_{r} = (\sin \gamma_{p} + \mu \cos \gamma_{p}) g$$

$$Cz = Cz_{0} (\alpha_{r} - \alpha_{0}) + \Delta Cz_{0} c$$

$$Cz = Cz_{r} (\alpha_{r} - \alpha_{0}) + \Delta Cz_{oSP}$$

$$Cz = Cz_{r} (\alpha_{r} - \alpha_{0}) + \Delta Cz_{oSP} + \Delta Cz_{oSP} + \Delta Cz_{oSP}$$

Mode d'obtention : Analytique par résolution temporelle de l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120), en supposant la poussée moteur modélisable par $F_{max} = F_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + q_1 M + q_2 M^2\right)$ et dirigée selon l'axe du fuselage, un coefficient de frottement pneu/piste constant $\mu = cte$, et une incidence au roulage constante $\alpha_r = cte$.

Domaine de définition : Tout avion au roulage. Scindez le roulage en autant de portions qu'il y a de phase où l'avion change de mode de fonctionnement c'est-à-dire dès lors que l'avion sort les spoilers, freine ou a une panne moteur, Car à chacun de ces changements, la valeur des coefficients A, B, C est modifiée et nos formules ne sont valables que lorsque ces coefficients sont constants.

Précision: ??? Nous ne disposons pas de données expérimentales pour vérifier uniquement la phase de roulage (seulement la longueur de piste totale). La précision de la longueur de piste au roulage dépendra du choix judicieux de la valeur moyenne de μ .

Tab. A.1 – Résolution temporelle

Symboles : Désignation	Unités
A, B, C: Coefficients du polynôme représentant l'accélération avion Γ	$m^{-1}, s^{-1} \text{ et } m/s^2$
(Equation 6.4, p. 120). Le coefficient A est le paramètre d'ou-	, , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
verture de la parabole représentant l'accélération Γ en fonction de	
la vitesse V (Figure A.1, p. 246). Si $A > 0$, alors la parabole	
est ouverte vers le haut (et inversement pour $A < 0$, la parabole	
est ouverte vers le bas). Le coefficient C représente la valeur de l'accélération statique $C = \Gamma(V = 0)$. Au décollage, le coefficient	
C > 0 est positif. À l'atterrissage, il est négatif $C < 0$.	
b : Envergure de la voilure c'est-à-dire la distance entre les extrémités	m
des ailes	
Cx: Coefficient de traînée de l'avion au roulage.	
Cz: Coefficient de portance de l'avion au roulage.	J-1
Cz_{α} : Gradient de coefficient de portance avec l'incidence Cx_{o} : Coefficient de traînée de frottement de l'avion. Attention, il	rad^{-1}
dépend de la configuration Bec/Volet adoptée.	
F_0 : Poussée au point fixe (altitude et vitesse nulles) des N_m moteurs.	N
Si l'un des N_m moteurs est en panne, alors il faut la multiplier	
$ \operatorname{par} \frac{N_m - 1}{N_m}. $. 0
\widetilde{F} : Poussée réduite (Equation 6.6, p. 121)	m/s^2
\widetilde{f}_r : Frottement statique réduit (Equation 6.6, p. 121)	m/s^2
g : Constante de gravité terrestre $g \approx 9.81 \ m/s^2$ k_i : Coefficient de traînée induite $k_i = \frac{1}{\pi \lambda}$	m/s^2
q_1, q_2 : Coefficients du modèle de poussée (Équation 6.3, p. 119)	$(m/s)^{-1}$ et $(m/s)^{-2}$
m: Masse de l'avion	
S: Surface voilure	$rac{kg}{m^2}$
\widetilde{T} : Traînée réduite (Equation 6.6, p. 121)	m^{-1}
V: Vitesse au temps t de l'avion par rapport à la piste (vent supposé	m/s
nul), exprimée au centre de gravité avion. V_i : Vitesse initiale de roulage.	m / a
V_i^{\oplus} . Vitesse initiale de roulage. $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$, $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$: Racines réelles du polynôme de l'accélération, c'est-à-dire vitesses	$m/s \ m/s$
pour lesquelles l'accélération est nulle $\Gamma=0$ pour $\Delta>0$: $V_{\Gamma=0}^{\oplus}=$	nt/s
$\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $V^{\Theta}_{-}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2}$	
$\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} \text{ et } V_{\Gamma=0}^{\bigcirc} = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}.$ $V_{\Gamma_{min}} \text{ : Vitesse pour laquelle l'accélération } \Gamma = \Gamma_{min} \text{ est minimale si } A >$	m/s
0 ou maximale si $A < 0$. $V_{\Gamma_{min}} = -\frac{D}{2A}$.	,
α_r : Incidence de l'avion au roulage (Figure 6.3, p. 118)	rad
α_0 : Incidence de portance nulle de l'avion. Attention, elle dépend de	rad
la configuration Bec/Volet adoptée. Δ : Discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$. Généralement positif pour le	
Δ : Discriminant $\Delta = B - 4AC$. Generalement positi pour le décollage et l'atterrissage, et négatif en cas de freinage lors d'un	
décollage interrompu (Rejected Take-Off RTO) (Section A.1,	
p. 245).	
ΔCx_o : Augmentation du coefficient de traînée de frottement due au train	
d'atterrissage ΔCx_{oTrain} , au moteur en panne $\Delta Cx_{omoulinet}$, à	
la sortie des spoilers ΔCx_{oSP} ΔCz_{oSP} : Augmentation du coefficient de portance due aux spoilers	
Δt : Temps de roulage	s
ΔX : Distance par courue par l'avion au roulage durant le temps Δt en	m
ayant comme vitesse initiale V_i .	. 2
Γ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rapport à la	m/s^2
piste, modélisée par (Equation 6.4, p. 120). Γ_{min} : Accélération minimale si $A > 0$ ou maximale si $A < 0$. $\Gamma_{min} =$	m/s^2
$\frac{-\Delta}{4A}$	mi, o
γ_p : Pente de la piste	rad
λ : Allongement de la voilure $\lambda = \frac{b^2}{S}$	
μ : Coefficient de frottement pneu/piste : $\mu_r \approx 0.015$ pour les roues	
libres, $\mu_f \approx 0.4$ pour le freinage (Table A.2, p. 273).	1 / 2
ρ : Masse volumique de l'air au niveau de la piste	kg/m^3
ρ_0 : Masse volumique au niveau de la mer : $\rho_0 = 1.225 kg/m^3$	kg/m^3

A.3 Cohérence entre les résolutions temporelle et cinétique

Nous allons prouver que les expressions de vitesse V et de distance ΔX au roulage que nous venons de démontrer par la résolution temporelle, permettent bien de retrouver l'expression de la distance de roulage ΔX démontrée précédemment par la résolution cinétique (Section 6.4, p. 131).

Cas du discriminant $\Delta < 0$:

À partir de l'expression de la distance de roulage par la résolution temporelle, retrouvons l'expression de cette distance donnée par la résolution cinétique.

$$\Delta X = \frac{a}{b} \ln \left| \frac{\cos(bt+c)}{\cos(bt_i+c)} \right| + d(t-t_i)$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{\cos^2(bt_i+c)}{\cos^2(bt+c)} \right| + d(t-t_i) \quad \text{or} \quad \cos^2 + \sin^2 = 1$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{\cos^2(bt_i+c)}{\cos^2(bt_i+c) + \sin^2(bt_i+c)} \right| \frac{\cos^2(bt+c) + \sin^2(bt+c)}{\cos^2(bt+c)} \right| + d(t-t_i)$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{1 + \tan^2(bt+c)}{1 + \tan^2(bt_i+c)} \right| + d(t-t_i)$$

En remplaçant $\tan(b t + c)$ par $-\frac{V-d}{a}$ (par définition de la vitesse (Equation A.1, p. 255) par la résolution temporelle), on arrive à exprimer la distance de roulage ΔX en fonction de la vitesse initiale V_i et de la vitesse courante V de la portion de roulage considérée :

$$\Delta X = -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{1 + \left(\frac{V-d}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{V_i - d}{a}\right)^2} \right| + \frac{d}{b} \left(-\tan^{-1} \left(\frac{V-d}{a}\right) - c + \tan^{-1} \left(\frac{V_i - d}{a}\right) + c \right)$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{V^2 - 2dV + d^2 + a^2}{V_i^2 - 2dV_i + d^2 + a^2} \right| - \frac{d}{b} \left(\tan^{-1} \left(\frac{V-d}{a}\right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_i - d}{a}\right) \right)$$

En remplaçant les expressions (Equation A.2, p. 256) de a, b, d, on obtient :

$$\Delta X = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2A\sqrt{|\Delta|}} \ln \left| \frac{V^2 + \frac{B}{A}V + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{\Delta}{4A^2}}{V_i^2 + \frac{B}{A}V_i + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{\Delta}{4A^2}} \right|$$

$$-\frac{\frac{B}{2A}}{\sqrt{|\Delta|}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{V + \frac{B}{2A}}{\sqrt{|\Delta|}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_i + \frac{B}{2A}}{\sqrt{|\Delta|}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{AV^2 + BV + C}{AV_i^2 + BV_i + C} \right|$$

$$-\frac{B}{A\sqrt{|\Delta|}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{2AV + B}{\sqrt{|\Delta|}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{2AV_i + B}{\sqrt{|\Delta|}} \right) \right)$$

C'est exactement l'expression que nous avions démontrée par la résolution cinétique de l'équation de Riccati pour $\Delta < 0$, ce qui est rassurant! Résolutions temporelle et cinétique sont donc cohérentes.

Cas du discriminant $\Delta = 0$:

De même, en partant de l'expression de la distance de roulage donnée par la résolution temporelle:

$$\Delta X = -\frac{1}{A} \ln \left| \frac{A t + c}{A t_i + c} \right| + d (t - t_i)$$

et en utilisant l'expression de la vitesse V donnée par la résolution temporelle :

$$A t + c = -\frac{1}{V + \frac{B}{2A}}$$

nous obtenons l'expression de la distance de roulage fonction de la vitesse initiale V_i et de la vitesse courante V de la portion de roulage considérée :

$$\Delta X = -\frac{1}{A} \ln \left| \frac{V_i + \frac{B}{2A}}{V + \frac{B}{2A}} \right| - \frac{d}{A} \left(\frac{1}{V + \frac{B}{2A}} + c - \frac{1}{V + \frac{B}{2A}} - c \right)$$

$$= \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{\left(V + \frac{B}{2A}\right)^2}{\left(V_i + \frac{B}{2A}\right)^2} \right| - \frac{d}{A} \left(\frac{1}{V + \frac{B}{2A}} - \frac{1}{V + \frac{B}{2A}} \right)$$

$$= \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A\left(V + \frac{B}{2A}\right)^2}{A\left(V_i + \frac{B}{2A}\right)^2} \right| + \frac{B}{A} \left(\frac{1}{2AV + B} - \frac{1}{2AV_i + B} \right)$$

Or pour un discriminant nul $\Delta = B^2 - 4AC = 0$, l'accélération de l'avion Γ peut se factoriser : $\Gamma = AV^2 + BV + C = A\left(V + \frac{B}{2A}\right)^2$ Nous retrouvons bien l'expression de la distance de roulage ΔX démontrée par la résolution cinétique.

$$\Delta X = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{AV^2 + BV + C}{AV_i^2 + BV_i + C} \right| + \frac{B}{A} \left(\frac{1}{2AV + B} - \frac{1}{2AV_i + B} \right)$$

Cas du discriminant $\Delta>0$ et vitesse initiale $-1\leq \frac{2AV_i+B}{\sqrt{\Delta}}\leq 1$: Partons de l'expression de la distance de roulage ΔX donnée par la résolution temporelle :

$$\Delta X = \frac{a}{b} \ln \left| \frac{\operatorname{ch}(bt+c)}{\operatorname{ch}(bt_i+c)} \right| + d(t-t_i)$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{\operatorname{ch}^2(bt_i+c)}{\operatorname{ch}^2(bt+c)} \right| + d(t-t_i) \quad \text{or} \quad \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{\operatorname{ch}^2(bt_i+c)}{\operatorname{ch}^2(bt_i+c) - \operatorname{sh}^2(bt_i+c)} \right| + d(t-t_i)$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{1 - \operatorname{th}^2(bt+c)}{1 - \operatorname{th}^2(bt+c)} \right| + d(t-t_i)$$

Or, en utilisant la formulation de la vitesse V = a th(bt + c) + d de la résolution temporelle, la distance au roulage ΔX peut s'exprimer en fonction de la vitesse de la sorte :

$$\Delta X = -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{1 - \left(\frac{V-d}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{V-d}{a}\right)^2} \right| + \frac{d}{b} \left(\operatorname{th}^{-1} \left(\frac{V-d}{a} \right) - c + \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{V_i - d}{a} \right) + c \right)$$

$$= \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{AV^2 + BV + C}{AV_i^2 + BV_i + C} \right| + \frac{B}{A\sqrt{\Delta}} \left(\operatorname{th}^{-1} \left(\frac{2AV + B}{\sqrt{\Delta}} \right) - \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \right) \right)$$

C'est exactement la solution que nous avions trouvé par la résolution cinétique.

26218 décembre 2006 Cas du discriminant $\Delta>0$ et vitesse initiale $-1\leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i+B}\leq 1$: De même, partons de l'expression de la distance de roulage ΔX donnée par la résolution

temporelle:

$$\Delta X = \frac{a}{b} \ln \left| \frac{\sinh (bt + c)}{\sinh (bt_i + c)} \right| + d(t - t_i)$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{\sinh^2 (bt_i + c)}{\sinh^2 (bt + c)} \right| + d(t - t_i)$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{\sinh^2 (bt_i + c)}{\cosh^2 (bt_i + c) - \sinh^2 (bt_i + c)} \frac{\cosh^2 (bt + c) - \sinh^2 (bt + c)}{\sinh^2 (bt + c)} \right| + d(t - t_i)$$

$$= -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{\frac{1}{\tanh^2 (bt_i + c)} - 1}{\frac{1}{\tanh^2 (bt_i + c)} - 1} \right| + d(t - t_i)$$

Or, en utilisant la formulation de la vitesse $V = \frac{a}{\operatorname{th}(bt+c)} + d$ donnée par la résolution temporelle, la distance au roulage ΔX peut s'exprimer en fonction de la vitesse de la sorte:

$$\Delta X = -\frac{a}{2b} \ln \left| \frac{\left(\frac{V-d}{a}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V-d}{a}\right)^2 - 1} \right| + \frac{d}{b} \left(\operatorname{th}^{-1} \left(\frac{a}{V-d} \right) - c + \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{a}{V_i - d} \right) + c \right)$$

$$= \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{AV^2 + BV + C}{AV_i^2 + BV_i + C} \right| + \frac{B}{A\sqrt{\Delta}} \left(\operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2AV + B} \right) - \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i + B} \right) \right)$$

Là encore, c'est exactement la solution que nous avions trouvé par la résolution cinétique.

REMARQUE A.6 En reprenant la relation $\operatorname{th}^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ (cf. [Zwi96] ou (Appendix D, p. 315)), il est possible de retrouver la formulation générale pour $\Delta > 0$.

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}}\right| = \begin{cases} \tanh^{-1}\left(\frac{2AV+B}{\sqrt{\Delta}}\right) & \text{si } -1 \leq \frac{2AV+B}{\sqrt{\Delta}} \leq 1\\ \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2AV+B}\right) & \text{si } -1 \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV+B} \leq 1 \end{cases}$$

Dans cette section, nous avons montré qu'il était possible de faire le rapprochement entre les deux types de résolution de l'équation de Riccati (Equation 6.4, p. 120) : résolution cinétique et résolution temporelle. Ainsi la longueur de piste au roulage ΔX donnée par la résolution cinétique est cohérente avec celle donnée par la résolution temporelle, ce qui est rassurant sur les calculs analytiques des deux résolutions...

Application numérique à l'A300 $\mathbf{A.4}$

Dans ce paragraphe, nous exposons la mise en œuvre de notre modèle de roulage au décollage avec ou sans panne moteur, et au décollage interrompu (RTO Rejected Take-Off) pour le cas particulier de l'A300 dans diverses configurations de becs/volets. La configuration réelle de décollage (conf.(1)) est exposée dans le documents principal (Section 6.10, p. 165).

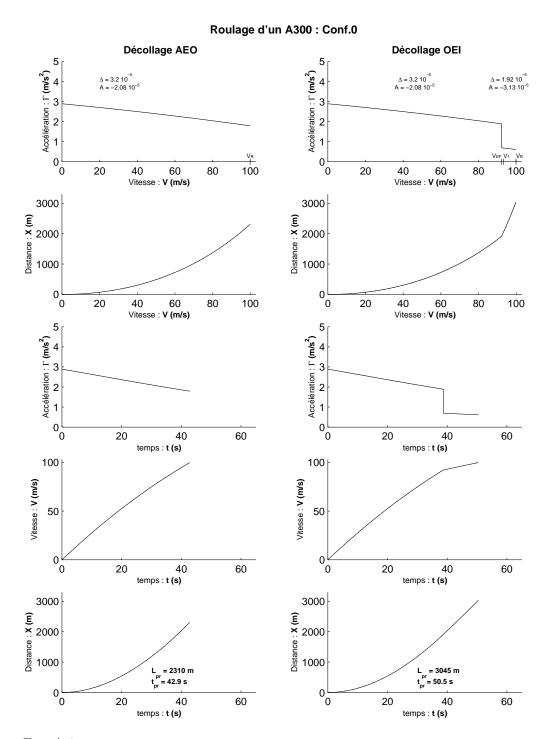


Fig. A.4 – Roulage au décollage : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces applications numériques ont été faites en configuration (0) : Becs 0 $^{\circ}$ Volets 0 $^{\circ}$.

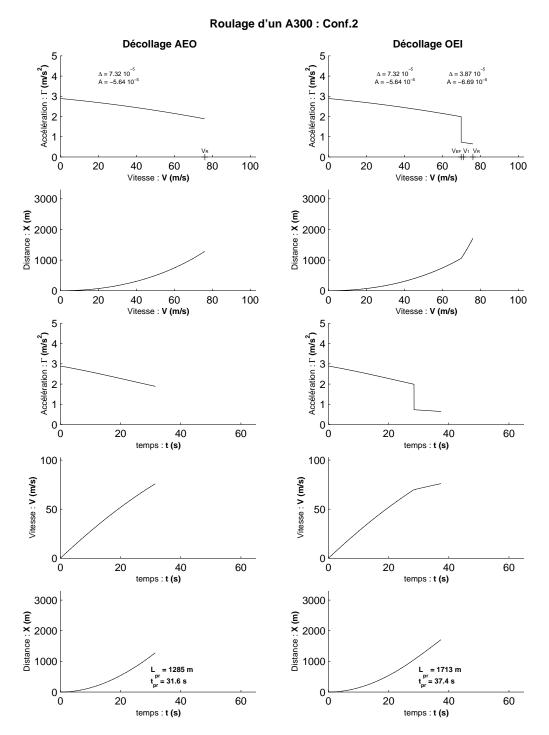


Fig. A.5 – Roulage au décollage : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces applications numériques ont été faites en configuration (2) : Becs 17 $^{\circ}$ Volets 15 $^{\circ}$.

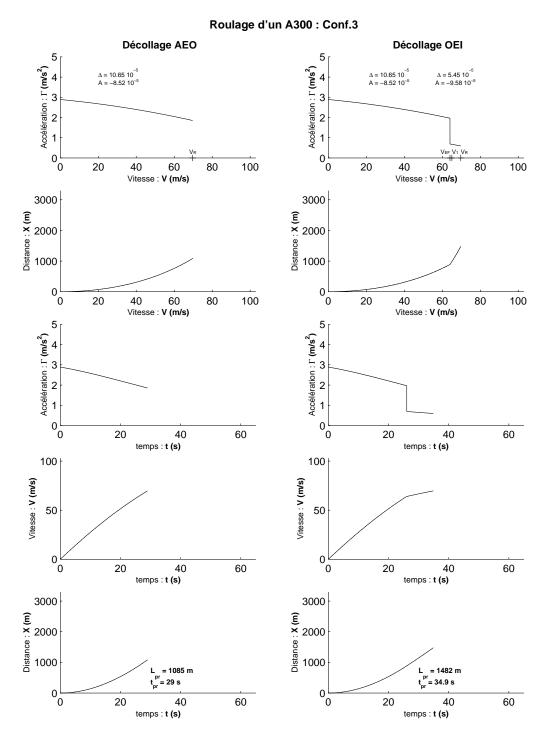


Fig. A.6 – Roulage au décollage : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces application numériques ont été faites en configuration (3) : Becs 25 $^{\circ}$ Volets 22 $^{\circ}$.

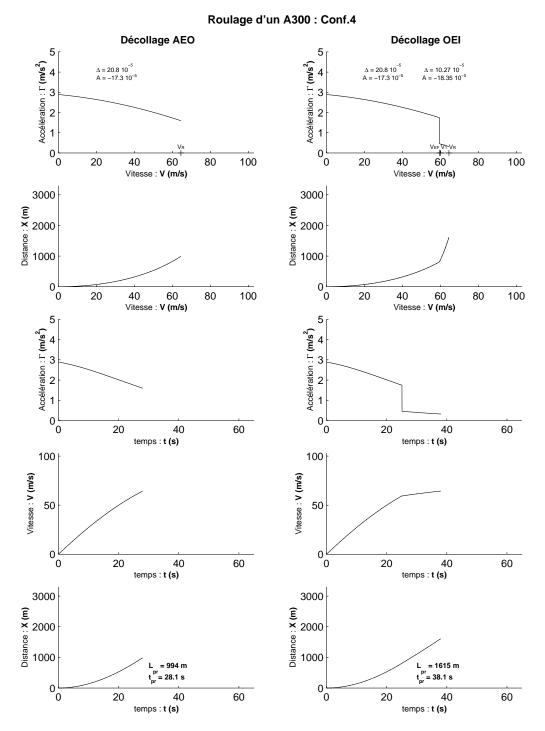


Fig. A.7 – Roulage au décollage : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces applications numériques ont été faites en configuration (4) : Becs 22 $^{\circ}$ Volets 25 $^{\circ}$.

Décollage interrompu d'un A300 : Conf.0 RTO avec panne RTO sans panne 5 $\Delta = 1.92 \cdot 10^{-5}$ $A = -3.13 \cdot 10^{-6}$ $\Delta = 3.2 \cdot 10^{-5}$ $A = -2.08 \cdot 10^{-5}$ $\Delta = 3.2 \cdot 10^{-5}$ $A = -2.08 \cdot 10^{-5}$ Accélération : Γ (m/s²) Accélération : Γ (m/s²) 0 $\Delta = -13.31 \ 10^{-1}$ $\Delta = -13.31 \ 10^{-1}$ -5 <u>-</u> -5 L 20 40 60 80 100 20 40 60 80 100 Vitesse : V (m/s) Vitesse : V (m/s) 3000 3000 Distance : **x** (a) 2000 Distance: X (m) 2000 1000 0 L 0 0 r 20 40 60 80 100 20 40 60 80 100 Vitesse : V (m/s) Vitesse : V (m/s) 5 5 Accélération : Γ (m/s²) Accélération : Γ (m/s²) 0 0 -5 ^{_}0 -5 0 20 40 60 20 40 60 temps : t (s) temps : t (s) 100 100 Vitesse : V (m/s) Vitesse : V (m/s) 50 50 0 0 k 0 20 40 60 20 40 60 temps : t (s) temps : t (s) 3000 3000 Distance: X (m) 2000 Distance : X (m) 2000 1000 = 3060 m +2V L = 2972 m +2V t_{pr} = 62.6 s t_{pr} = 61.6 s 0,0 0, 20 40 60 20 40 60 temps : t (s) temps : t (s)

Fig. A.8 – Longueur de piste RTO : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces applications numériques ont été faites en configuration (0) : Becs 0 ° Volets 0 ° .

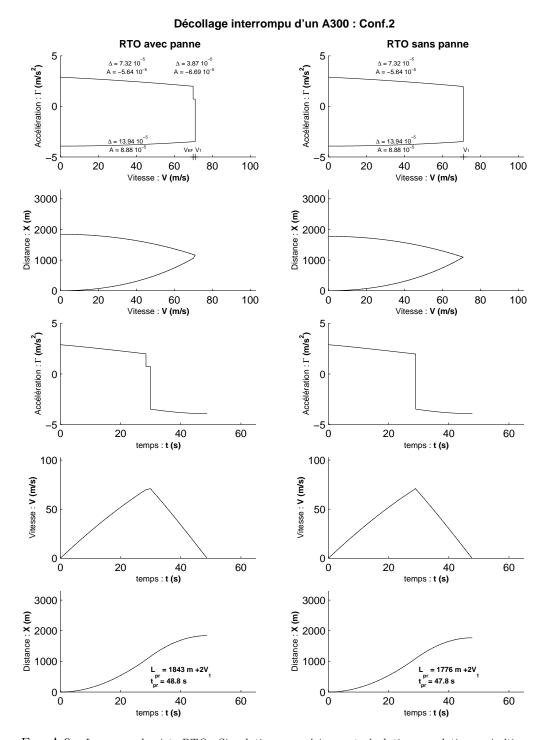


Fig. A.9 — Longueur de piste RTO : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces applications numériques ont été faites en configuration (2) : Becs 17 $^{\circ}$ Volets 15 $^{\circ}$.

Décollage interrompu d'un A300 : Conf.3 RTO avec panne RTO sans panne $\Delta = 5.45 \cdot 10^{-5}$ $A = -9.58 \cdot 10^{-5}$ $\Delta = 10.65 \cdot 10^{-5}$ $A = -8.52 \cdot 10^{-5}$ $\Delta = 10.65 \ 10^{-1}$ $A = -8.52 \ 10^{-1}$ Accélération : Γ (m/s²) Accélération : Γ (m/s²) 0 $\Delta = 28.02 \ 10^{-1}$ -5 ^L A = 17.85 10 A = 17.85 10 -5 L 20 40 60 80 100 20 40 60 80 100 Vitesse : V (m/s) Vitesse : V (m/s) 3000 3000 Distance : **x** (a) 2000 Distance : X (m) 2000 1000 0 L 0 0 r 20 40 60 80 100 20 40 60 80 100 Vitesse : V (m/s) Vitesse : V (m/s) 5 5 Accélération : Γ (m/s²) Accélération : Γ (m/s²) 0 0 -5 ^{_}0 -5 0 20 40 60 20 40 60 temps : t (s) temps : t (s) 100 100 Vitesse : V (m/s) Vitesse : V (m/s) 50 50 0 0 F 0 20 40 60 20 40 60 temps : t (s) temps : t (s) 3000 3000 Distance: X (m) 2000 Distance : X (m) 2000 1000 = 1584 m +2V = 1521 m +2V $t_{pr}^{pr} = 44.4 \text{ s}$ t_{pr} = 45.4 s 0,0 0, 20 40 60 20 40 60 temps : t (s) temps : t (s)

Fig. A.10 – Longueur de piste RTO : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces application numériques ont été faites en configuration (3) : Becs 25 $^{\circ}$ Volets 22 $^{\circ}$.

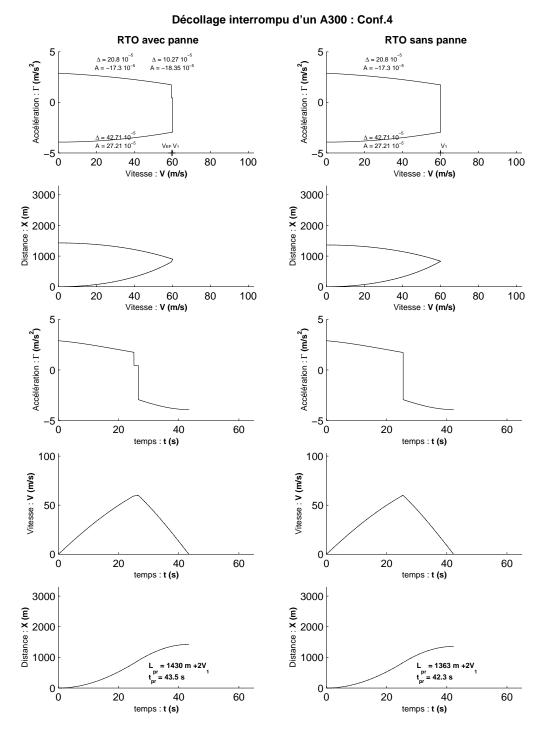


Fig. A.11 – Longueur de piste RTO : Simulations numériques et résolutions analytiques cinétique et temporelle du roulage pour le cas d'un A300. Ces applications numériques ont été faites en configuration (4) : Becs 25 ° Volets 41 ° .

A.5 Modèles du coefficient de frottement pneu/piste μ

Lorsqu'un avion est en contact avec la piste, il se crée une force de réaction au sol dont la composante parallèle à la piste est proportionnelle à la composante perpendiculaire à la piste. Cette proportionnalité, adimensionnelle, est le coefficient de frottement pneu/piste μ . Autrement dit, la composante parallèle à la piste de la force de réaction au sol, est égale au produit du coefficient μ par la composante perpendiculaire à la piste. Ce coefficient dépend de la nature et de l'état de la piste, de la vitesse à laquelle roule l'avion, des pneumatiques, etc ... Nous noterons μ_r le coefficient de frottement pneu/piste en roue libre, et μ_f le coefficient de frottement pneu/piste au freinage. La modélisation de ce coefficient est primordiale pour l'étude des phases de roulage des décollages/atterrissages d'avions, et c'est pourquoi elle fait l'objet de cette section.

L'inventaire des modèles existants de ce coefficient, que nous avons répertoriés dans la littérature, sera d'abord effectué. Ensuite, ces différents modèles seront confrontés entre eux. Cela permettra, pour finir, d'élaborer nos propres modèles du coefficient de frottement pneu/piste (Table A.4, p. 293). Le modèle du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r que nous proposerons, sera basé sur le modèle d'A.Lausetti, ajusté sur les données expérimentales proposées par l'ESDU, et dépendant en plus de la pression des pneumatiques. Le modèle du coefficient de frottement au freinage μ_f sera également basé sur celui d'A.Lausetti dont nous adapterons la modélisation à l'état et la nature de la piste en fonction du coefficient de frottement statique $\mu_f(V=0)$, à vitesse nulle.

A.5.1 Modèles existants du coefficients de frottement pneu/piste Modèle d'Attilio Lausetti :

A.Lausetti [Lau92] propose un modèle du coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f et en roue libre μ_r .

Coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f :

$$\mu_f = \frac{\mu_f(V=0)}{1 + \frac{V}{W}} \tag{A.3}$$

 μ_f : Coefficient de frottement pneu/piste au freinage fonction de la vitesse de

 $\mu_f(V=0)$: Coefficient de frottement statique pneu/piste au freinage (Table A.2, p. 273) à vitesse nulle

V: Vitesse de l'avion par rapport à la piste m/s

W: Vitesse représentative de l'état de la piste : W=100m/s pour une piste m/s rugueuse et sèche, W=50m/s pour une piste rugueuse et mouillée, et W=25m/s pour une piste visqueuse ou glacée.

Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r :

$$\mu_r = \mu_r(V=0) + k_p D_n F_r^2$$

Nombre de Froude : $F_r = \frac{V}{\sqrt{g D_r}}$
Rapport de charge : $D_n = \frac{M_r g}{p_r D_r^2}$

 M_r est la masse apparente vue par une roue, c'est-à-dire :

$$M_r = \frac{M_{MTOW}g - \frac{1}{2}\rho SV^2Cz_r}{g \; n_r}$$

Ce qui permet finalement d'aboutir à l'expression du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r suivant :

$$\mu_r = \mu_r(V=0) + \frac{k_p}{p_r D_r^3 g n_r} \left(M_{MTOW} g - \frac{1}{2} \rho S V^2 C z_r \right) V^2$$
(A.4)

: Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre, fonction de la vitesse μ_r de l'avion

 $\mu_r(V=0)$: Coefficient de frottement statique pneu/piste en roue libre (Table A.2, p. 273), à vitesse nulle

V: Vitesse de l'avion par rapport à la piste

: Coefficient expérimental. A.Lausetti donne une valeur $k_p = 2 \cdot 10^{-3}$. Mais il semblerait (Figure A.15, p. 277) qu'il soit plus judicieux de considérer un coefficient de $k_p = 2 \cdot 10^{-4}$.

: Pression des pneumatiques $Pa = N/m^2$: Diamètre des roues D_r : Constante de gravité terrestre $g = 9.81 \, m/s^2$: Nombre de roues de l'avion

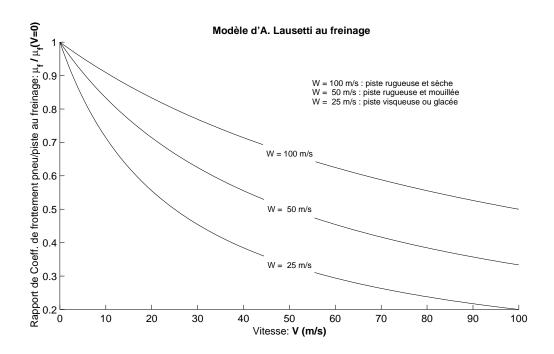
: Masse de l'avion M_{MTOW}

 $kg \\ kg/m^3 \\ m^2$: Masse volumique de l'air (1.225 à altitude nulle) ρ S: Surface voilure de l'avion

 Cz_r : Coefficient de portance au roulage

	Coefficient de frottement pneu/piste μ à vitesse nulle				
État et nature de la	au	freinage	en r	oue libre	
piste ou du terrain	$\mu_f(V=0)$		μ_r	(V=0)	
	Bon état	Mauvais état	Bon état	Mauvaise état	
Béton rugueux, propre et sec	1.00	0.80	0.012	0.015	
Asphalte rugueux, propre et sec	0.90	0.70	0.015	0.018	
Béton rugueux, propre et humide	0.80	0.60	0.015	0.018	
Asphalte rugueux, propre et humide	0.70	0.50	0.018	0.020	
Macadam sec	0.80	0.65	0.020	0.030	
Macadam humide	0.65	0.50	0.030	0.040	
Tapis herbeux, dur et sec	0.60	0.55	0.040	0.045	
Tapis herbeux, dur et humide	0.55	0.45	0.045	0.050	
Tapis herbeux, mou et sec	0.40	0.35	0.050	0.055	
Tapis herbeux humide	0.35	0.30	0.055	0.060	
Piste enneigée avec de la neige dure dont	0.35	0.30	0.025	0.035	
l'épaisseur $< 6 cm$					
Piste enneigée avec de la neige molle dont	0.25	0.20	0.030	0.040	
l'épaisseur $< 6 cm$					
Piste glacée opaque	0.20	0.15	0.015	0.020	
Piste glacée lisse	0.15	0.10	0.010	0.015	

Tab. A.2 – Valeurs proposées par Attilio Lausetti [Lau92], du coefficient de frottement pneu/piste statique $\mu(V=0)$.



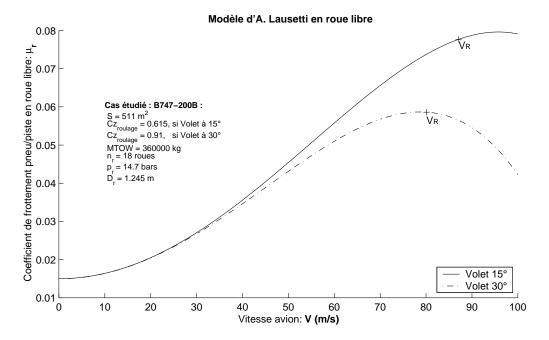


FIG. A.12 – Modèle du coefficient de frottement pneu/piste donné par A.Lausetti (ce sont les modèles originaux, sans recalage : $k_p = 2 \ 10^{-3}$) : au freinage μ_f et en roue libre μ_r .

Modèle de l'ESDU

Coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f sur piste mouillée :

L'ESDU [ESD00a, ESD00b, ESD00c, ESD00d] considère que le coefficient de frottement pneu/piste au freinage est constant sur piste sèche mais propose par contre un modèle sur piste mouillée, assez proche de celui d'A.Lausetti (Equation A.3, p. 272).

$$\mu_f = \frac{\mu_f(V=0)}{1 + \beta_{esdu} \frac{\frac{1}{2}\rho_{pluie}V^2}{p_r}}$$
(A.5)

Le coefficient β_{esdu} peut se modéliser de la sorte :

$$\beta_{esdu} = \frac{\kappa^2}{d_{tex}} \tag{A.6}$$

 μ_f : Coefficient de frottement pneu/piste au freinage, fonction de la vitesse avion $\mu_f(V=0)$: Coefficient de frottement statique pneu/piste au freinage (Table A.2, p. 273), à vitesse nulle

 $\begin{array}{ccc} V & : \mbox{Vitesse de l'avion par rapport à la piste} & m/s \\ p_r & : \mbox{Pression de gonflage des pneumatiques} & Pa \\ \rho_{pluie} & : \mbox{Masse volumique de l'eau de pluie recouvrant la piste} & kg/m^3 \end{array}$

 β_{esdu} : Coefficient expérimental selon la nature de la piste (Equation A.6, p. 275)

: Paramètre d'interaction pneu/piste caractéristique des pneus, des roues, et $m^{1/2}$ des freins de l'avion. [ESD00d] indique $\kappa=0.1094\,in^{1/2}$ pour un B727, $\kappa=0.2024\,in^{1/2}$ pour un B737, $\kappa=0.1324\,in^{1/2}$ pour une Caravelle 116, $\kappa=0.0967\,in^{1/2}$ pour un DC9-15, et $\kappa=0.1518\,in^{1/2}$ pour un petit avion de combat

 d_{tex} : Profondeur de la macro-texture de la piste. [ESD00a] indique des valeurs de d_{tex} pour différents sites: NASA Wallops ($d_{tex}=0.006\ in$ pour la piste en béton, $d_{tex}=0.019\ in$ pour la piste en asphalte recouvert de bitume, $d_{tex}=0.072in$ pour la piste en béton rainurée), FAA Technical Center ($d_{tex}=0.008in$ pour la piste en asphalte, $d_{tex}=0.028\ in$ et $d_{tex}=0.049\ in$ pour les piste en asphalte rainurées), Brunswick Naval Air Station ($d_{tex}=0.017in$ pour la piste en asphalte)

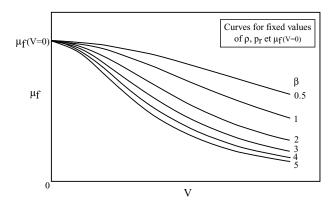


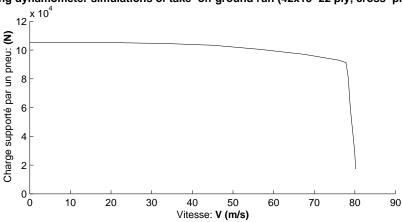
FIG. A.13 – Exemples of curves generated from (Equation A.5, p. 275) representing variation of the coefficient of friction μ_f with ground speed [ESD00d].

Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r :

L'ESDU ne propose pas de modèle analytique du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r , mais propose par contre [ESD85], un exemple graphique représentant l'évolution de ce coefficient μ_r en fonction de la vitesse (Figure A.14, p. 276).

Il est curieux de constater que l'ordre de grandeur de l'évolution du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r de l'exemple numérique de l'ESDU, est très différent de celui du modèle d'A.Lausetti (Figure A.12, p. 274). Pour comparaison, appliquons au modèle d'A.Lausetti (Equation A.4, p. 273) la charge (poids apparent appliqué au pneu) de l'exemple de l'ESDU, pour une roue de 42 in de diamètre (c'est-à-dire 1.07 m). Il faudrait considérer un coefficient k_p presque 10 fois plus petit que la valeur qu'A.Lausetti donne, pour que son modèle soit cohérent avec l'exemple donné par l'ESDU (Figure A.15, p. 277).

Exemples of variation of tyre rolling resistance coefficient with speed during dynamometer simulations of take-off ground run (42x15-22 ply, cross-ply tyre)



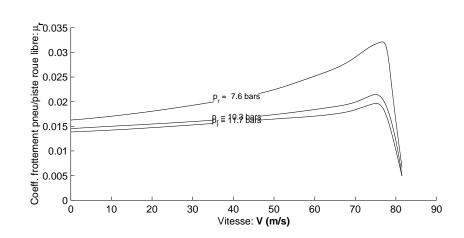
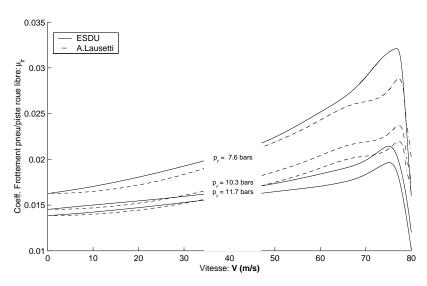


FIG. A.14 – Courbe expérimentale du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r proposée par l'ESDU [ESD85]. La nature et l'état de la piste de ces courbes expérimentales ne sont pas précisés par l'ESDU.

Comparaison des modèles ESDU et Lausetti recalé (kp = 2 10⁻⁴)



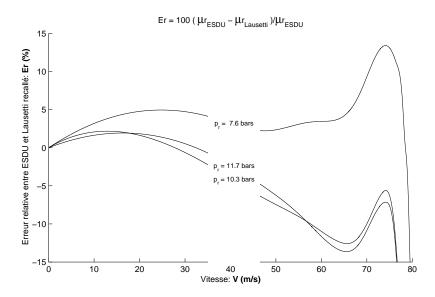


Fig. A.15 – Comparaison du modèle d'A.Lausetti (Equation A.4, p. 273) appliqué à l'exemple de l'ESDU (Figure A.14, p. 276). Pour que le modèle d'A.Lausetti soit cohérent avec l'exemple de l'ESDU, le coefficient k_p du modèle d'A.Lausetti a été considéré à 0.0002 au lieu de 0.002

Modèle de la norme FAR 25.109

La norme FAR 25 [FAA03], propose un modèle du coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f pour piste mouillée, en fonction de la vitesse avion et de la pression des pneus.

- (c) The wet runway braking coefficient of friction for a smooth wet runway is defined as a curve of friction coefficient versus ground speed and must be computed as follows:
 - (1) The maximum tire-to-ground wet runway braking coefficient of friction is defined as:

$\mu_{t/g_{max}} = a$	$\left(\frac{V_{knot}}{100}\right)^3 + b$	$\left(\frac{V_{knot}}{100}\right)^2 + c$	$\left(\frac{V_{knot}}{100}\right) + d$
-----------------------	---	---	---

$Tire \ Pressure \ (psi)$	a	b	c	d
50	-0.0350	0.306	-0.851	0.883
100	-0.0437	0.320	-0.805	0.804
200	-0.0331	0.252	-0.658	0.692
300	-0.0401	0.263	-0.611	0.614

Where-

 ${\it Tire \ Pressure : maximum \ airplane \ operating \ tire \ pressure \ (psi) \ ;}$

 $\mu_{t/g_{max}}$: maximum tire-to-ground braking coefficient; V_{knot} : airplane true ground speed (knots); and

Linear interpolation may be used for tire pressures other than those listed.

(2) The maximum tire-to-ground wet runway braking coefficient of friction must be adjusted to take into account the efficiency of the antiskid system on a wet runway. Anti-skid system operation must be demonstrated by flight testing on a smooth wet runway, and its efficiency must be determined. Unless a specific anti-skid system efficiency is determined from a quantitative analysis of the flight testing on a smooth wet runway, the maximum tire-to-ground wet runway braking coefficient of friction determined in paragraph (c)(1) of this section must be multiplied by the efficiency value associated with the type of anti-skid system installed on the airplane:

Type of anti-skid system	Efficiency value		
On-Off	0.30		
Quasi-Modulating	0.50		
Fully Modulating	0.80		

Tab. A.3 – Efficiency value η

(d) At the option of the applicant, a higher wet runway braking coefficient of friction may be used for runway surfaces that have been grooved or treated with a porous friction course material. For grooved and porous friction course runways, the wet runway braking coefficient of friction is defined as either:

- (1) 70 percent of the dry runway braking coefficient of friction used to determine the dry runway accelerate-stop distance; or
- (2) The wet runway braking coefficient defined in paragraph (c) of this section, except that a specific anti-skid system efficiency, if determined, is appropriate for a grooved or porous friction course wet runway, and the maximum tire-to-ground wet runway braking coefficient of friction is defined as:

$$\mu_{t/g_{max}} = a_g \left(\frac{V_{knot}}{100}\right)^5 + b_g \left(\frac{V_{knot}}{100}\right)^4 + c_g \left(\frac{V_{knot}}{100}\right)^3 + d_g \left(\frac{V_{knot}}{100}\right)^2 + e_g \left(\frac{V_{knot}}{100}\right) + f_g$$

$$Tire$$

$$Pres.$$

$$a_g$$

$$b_g$$

$$c_g$$

$$d_g$$

$$e_g$$

$$f_g$$

	$egin{array}{c} Tire \ Pres. \ (psi) \end{array}$	a_g	b_g	c_g	d_g	e_g	f_g
	50	0.1470	-1.050	2.673	-2.683	0.403	0.859
	100	0.1106	-0.813	2.130	-2.200	0.317	0.807
	200	0.0498	-0.398	1.140	-1.285	0.140	0.701
L	300	0.0314	-0.247	0.703	-0.779	0.00954	0.614

Where-

Tire Pressure: maximum airplane operating tire pressure (psi);

 $\mu_{t/g_{max}}$: maximum tire-to-ground braking coefficient; V_{knot} : airplane true ground speed (knots); and

Linear interpolation may be used for tire pressures other than those listed. Amdt. 25-92, Eff. 3/20/98"

- norme FAR 25.109 : Accelerate-stop distance. -[FAA03] - -

En unités du système international (conversion des vitesses en m/s et non pas en kt), les modèles deviennent :

Piste standard:

$$\mu_f = \eta \left(a_{SI} V^3 + b_{SI} V^2 + c_{SI} V + d_{SI} \right)$$
(A.7)

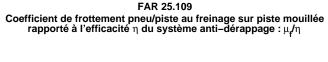
Pression (bar)	a_{SI}	b_{SI}	c_{SI}	d_{SI}
3.45	$-2.57 10^{-7}$	$11.6 \ 10^{-5}$	$-1.65 \ 10^{-2}$	0.883
6.89	-3.2110^{-7}	$12.1 \ 10^{-5}$	$-1.56 10^{-2}$	0.804
13.79	-2.4310^{-7}	$9.52 \ 10^{-5}$	$-1.28 \ 10^{-2}$	0.692
20.68	-2.9510^{-7}	9.9410^{-5}	$-1.19 \ 10^{-2}$	0.614

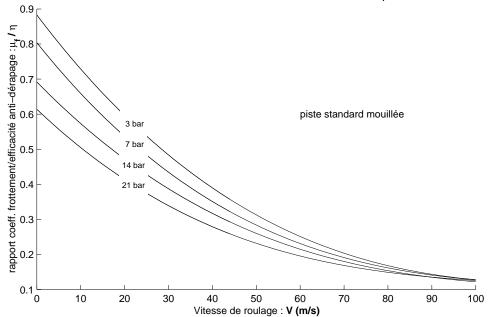
Piste rainurée ou traitée avec un matériau augmentant l'adhérence :

$$\mu_f = \eta \left(a_{SI} V^3 + b_{SI} V^2 + c_{SI} V + d_{SI} \right)$$
(A.8)

Pression (bar)	a_{gSI}	b_{gSI}	c_{gSI}	d_{gSI}	e_{gSI}	f_{gSI}
3.45	$4.08 \ 10^{-10}$	$-1.499 \ 10^{-7}$	$1.96 \ 10^{-5}$	$-10.1\ 10^{-4}$	$7.83 \ 10^{-3}$	0.859
6.89	$3.07 \ 10^{-10}$	$-1.161 \ 10^{-7}$	$1.56 \ 10^{-5}$	$-8.31\ 10^{-4}$	$6.16 \ 10^{-3}$	0.807
13.79	$1.38 \ 10^{-10}$	$-0.568 \ 10^{-7}$	$0.84 \ 10^{-5}$	$-4.86\ 10^{-4}$	$2.72 \ 10^{-3}$	0.701
20.68	$0.87 \ 10^{-10}$	$-0.353 \ 10^{-7}$	$0.52 \ 10^{-5}$	$-2.94\ 10^{-4}$	$-0.185 10^{-3}$	0.614

Avec η le coefficient d'efficacité du système anti-dérapage (anti-skid) (Table A.3, p. 278).





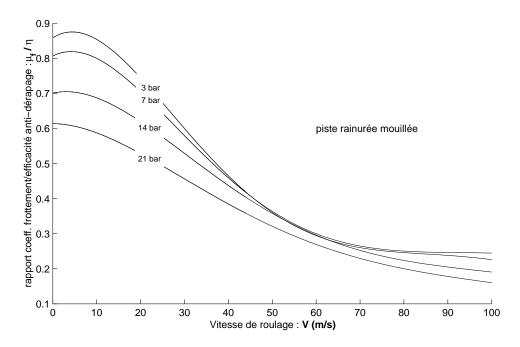


Fig. A.16 – Modèle de coefficient de frottement pneu/piste au freinage sur piste mouillée de la norme FAR 25.

Modèle de DIN (Deutsches Institut für Normung)

Dans [OB96], un modèle de DIN du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r est donnée :

$$\mu_r = 0.005 + \frac{1.0545 \, 10^3}{p_r} + \frac{0.6156}{p_r} V^2$$

 μ_r : Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre (ou coefficient de résistance au roulage)

V: Vitesse de l'avion par rapport à la piste \$m/s\$ p_r : Pression de gonflage des pneumatiques Pa

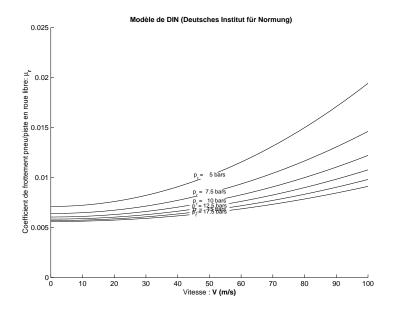


Fig. A.17 – Modèle de DIN du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre

Modèle d'Andreau

Dans [OB96], un modèle d'Andreau du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r est donnée :

$$\mu_r = 0.002 \left(\frac{1.5849 \, 10^4}{p_r^{0.64}} + 3.895 \, 10^5 \frac{V^{3.7}}{p_r^{2.08}} \right) \tag{A.9}$$

Il est précisé que cette formule est bien adaptée pour des vitesses entre 20 et 150 km/h (c'est-à-dire entre 5.5 et 42 m/s) et des pressions pneus entre 0.9 et 10 bars.

 μ_r : Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre (ou coefficient de résistance au roulage)

V : Vitesse de l'avion par rapport à la piste m/s p_r : Pression de gonflage des pneumatiques Pa

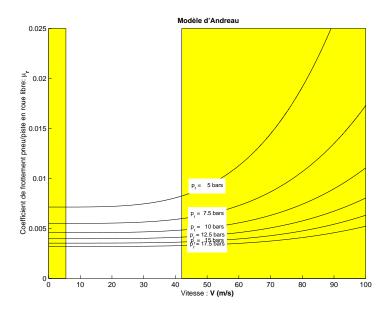


FIG. A.18 – Modèle d'Andreau du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre

Modèle de T.Gillespie

Dans son ouvrage [Gil92], Thomas D. Gillespie expose différents modèles du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r , comme les deux modèles ITS et UMTRI des paragraphes suivants.

"The coefficient is directly proportional to speed because of increased flexing work and vibration in the tire body, although the effect is small at moderate and low speeds and is often assumed to be constant for calculation. The influence of speed becomes more pronounced when speed is combined with lower inflation pressure. (Figure A.19, p. 283) shows the rolling resistance versus speed for radial, bias-belted, and bias-ply tires. The sharp upturn in coefficient at high speeds is caused by high-energy standing wave developed in the tire carcass just behind the tire contact patch. If allowed to persist for even moderate periods of time, catastrophic failure can result. Thus formation of a standing wave is one of the primary effects limiting a tire's rated speed. Modern tires rated for high speed normally include stabilizers in the shoulder area to control the development of standing waves."

- Thomas D. Gillespie - [Gil92] - -

Il donne également un modèle valable pour les faibles vitesses :

$$\mu_r = 0.01 + 2.24 \, 10^{-4} V$$

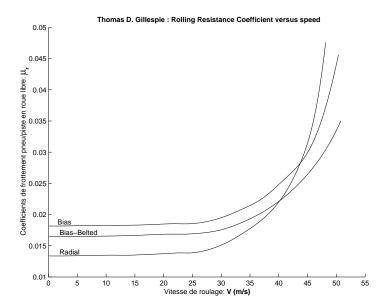
 μ_r : Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre (nommé également coefficient de résistance au roulage)

V : Vitesse de l'avion par rapport à la piste

m/s

 p_r : Pression de gonflage des pneumatiques

Pa



 $\begin{tabular}{lll} Fig. & A.19-Courbes & propos\'ees & par & Thomas & D. & Gillespie & [Gil92] & : Rolling & resistance & versus & speed \\ \end{tabular}$

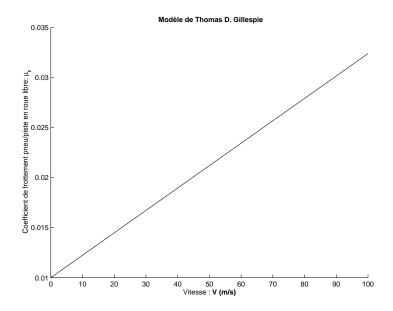


FIG. A.20 – Modèle de Thomas D. Gillespie du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r .

Modèle de l'ITS (Institute of Technology in Stuttgart)

Un modèle de l'Institute of Technology in Stuttgart du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r , est exposé dans [Gil92] :

$$\mu_r = \mu_{r0} + 2.43 \, 10^{-4} \mu_{rS} V^{2.5}$$

 u_r : Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre (ou coefficient de

résistance au roulage)

 μ_{r0},μ_{rS} : (Basic coefficient and speed effect coefficient). Coefficients déterminés par

(Figure A.21, p. 284)

 $\begin{array}{c} V & : \mbox{Vitesse de l'avion par rapport à la piste} \\ p_r & : \mbox{Pression de gonflage des pneumatiques} \end{array} \qquad \begin{array}{c} m/s \\ Pa \end{array}$

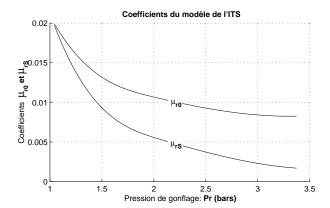


Fig. A.21 – Coefficients μ_{r_0}, μ_{r_S} du modèle de l'ITS.

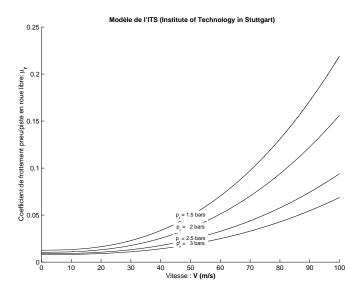


Fig.~A.22-Modèle de l'ITS du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre

Étant donnée la plage de variation de pression des pneus p_r donnée (Figure A.21, p. 284), le modèle de l'ITS semble plus adaptée à des pneus de voitures que des pneus d'avions dont la pression de gonflage est bien supérieure.

Modèle de l'University of Michigan Transportation Research Institute

Un modèle de l'University of Michigan Transportation Research Institute, du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r , est exposé dans [Gil92] :

Radial tires:
$$\mu_r = C_h \left(0.0041 + 9.17 \, 10^{-5} V \right)$$

Bias-ply tires :
$$\mu_r = C_h \left(0.0066 + 1.03 \, 10^{-4} V \right)$$

$$C_h = \begin{cases} 1.0 & \text{for smooth concrete,} \\ 1.2 & \text{for worn concrete, brick, cold blacktop,} \\ 1.5 & \text{for hot blacktop.} \end{cases}$$

 μ_r : Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre (ou coefficient de résistance au roulage)

 C_h : Road surface coefficient

V: Vitesse de l'avion par rapport à la piste m/s p_r : Pression de gonflage des pneumatiques Pa

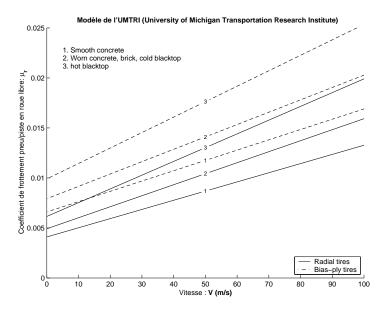


Fig. A.23 – Modèle de l'UMTRI du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre

A.5.2 Confrontation des modèles existants et élaboration d'un modèle à partir de celui d'A.Lausetti

Dans cette section, nous allons comparer les différents modèles du coefficient de frottement pneu/piste μ au freinage et en roue libre, que nous venons de répertorier. Nous validerons le fait que le modèle d'A.Lausetti est pertinent et nous élaborerons un modèle plus précis à partir de celui-ci. Nous vous proposerons alors un modèle du coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f (Equation A.10, p. 287), fonction de la vitesse de roulage V et de la nature et état de la piste, et un modèle en roue libre μ_r (Equation A.11, p. 291) fonction de la vitesse, de la charge subie par le pneu, de la pression, du diamètre des pneus, . . .

Coefficient de frottement pneu/piste au freinage $\mu_f(V)$

Les modèles existants de coefficient de frottement pneu/piste au freinage sont plutôt destinés à des pistes mouillées (modèle ESDU (Equation A.5, p. 275) et modèle FAR 25 (Equation A.7, p. 279) et (Equation A.8, p. 279)), excepté celui d'A.Lausetti (Equation A.3, p. 272) qui traite tout type de piste. Comparons les différents modèles su piste mouillée

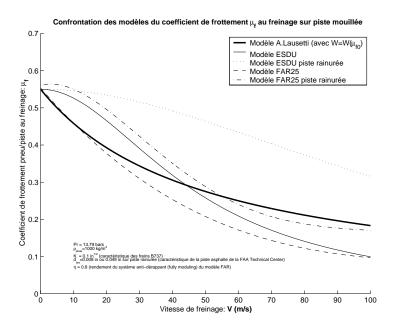


Fig. A.24 – Modèles du coefficient de frottement au freinage sur piste mouillée. $(\mu_f(V=0)=0.55 \text{ a été considéré pour les modèles d'A.Lausetti et de l'ESDU})$

(Figure A.24, p. 286). Ces modèles mettent bien en évidence le fait que sur piste rainurée ou ayant subi des traitements spécifiques tel que le "dénuage chimique" qui augmente la rugosité en faisant ressortir le gravier en surface, l'adhérence est meilleure (μ_f plus élevé) que sur les pistes lisses.

Par ailleurs, nous observons que les modèles d'A.Lausetti, de la FAR 25, et de l'ESDU sont assez cohérents entre eux, excepté le modèle ESDU sur piste rainurée qui est plus optimiste.

CE QU'IL FAUT RETENIR A.2 Le coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f , diminue lorsque la vitesse V augmente. Autrement dit, au cours du freinage, plus l'avion ralentit (V diminue), meilleure est la capacité de freinage.

Le modèle d'A. Lausetti étant cohérents avec les autres modèles et étant le seul ayant un domaine de définition étendu à tout état de piste (piste glacée, piste mouillée, piste sèche, piste en herbe, etc...), nous retiendrons ce modèle pour nos applications numériques avec un coefficient de frottement pneu/piste au freinage fonction de la vitesse $\mu_f(V)$. Néanmoins, pour améliorer la maniabilité de ce modèle, nous pouvons modéliser W la vitesse réduisant de moitié le frottement statique. A. Lausetti propose trois valeurs de cette vitesse : 100 m/s sur piste sèche, 50 m/s sur piste mouillée et 25 m/s sur piste glacée. Au trement dit, cette vitesse dépend de l'état de la piste, donc nous proposons de la modéliser par une fonction continue du coefficient de frottement statique $\mu_f(V=0)$:

$$W = 107 (\mu_f(V=0))^2 - 12.5 \mu_f(V=0) + 24.5$$

Cette fonction a été choisie de manière à respecter exactement les trois cas donnés

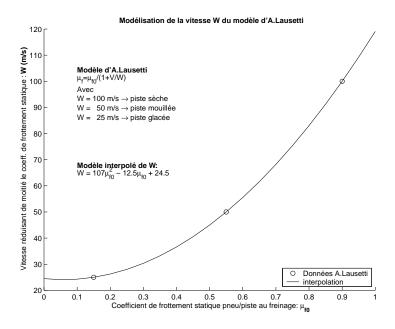


Fig. A.25 – Modélisation de la vitesse W du modèle d'A.Lausetti

par A. Lausetti (Figure A.25, p. 287). Ce qui aboutit (Figure A.26, p. 288) au modèle du coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f suivant :

$$\mu_f = \frac{\mu_f(V=0)}{1 + \frac{V}{107 (\mu_f(V=0))^2 - 12.5 \mu_f(V=0) + 24.5}}$$
(A.10)

Avec:

V: Vitesse de l'avion par rapport à la piste m/s

 μ_f : Coefficient de frottement pneu/piste au freinage

 $\mu_f(V=0)$: Coefficient de frottement statique pneu/piste au freinage,

c'est-à-dire à vitesse nulle

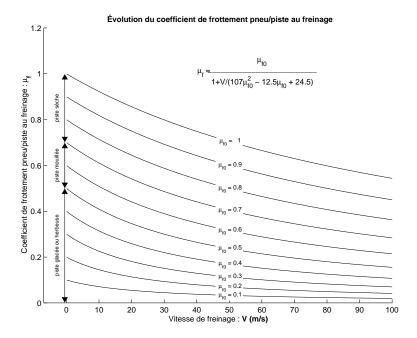


FIG. A.26 – Modèle proposé du coefficient de frottement pneu/piste au freinage μ_f élaboré à partir de celui d'A.Lausetti

Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre $\mu_r(V)$

L'ESDU ne proposant pas de modèle analytique, mais un exemple numérique (Figure A.14, p. 276), afin de comparer les modèles de coefficient de frottement pneu/piste au roulage (roue libre) $\mu_r(V)$, nous allons comparer tous les modèles sur l'exemple numérique donné par l'ESDU.

C'est ce qui est fait (Figure A.27, p. 289). Les modèles de T.Gillespie et de l'UMTRI ne dépendent pas de la pression des pneumatiques, c'est pourquoi la pente du coefficient μ_r en fonction de la vitesse V, qu'ils présentent, est inchangée quelque soit la pression des pneus. Ces modèles ont probablement dû être élaboré pour une pression de pneu donnée. Les modèles de DIN et d'Andreau, tout deux extrait du même article [OB96], sont cohérents entre eux. Ils se rapprochent du modèle de l'ESDU et d'A.Lausetti pour les pressions pneumatiques élevées. Le modèle UMTRI a une pente cohérente avec celle de l'ESDU et d'A.Lausetti, mais présente un écart constant.

Le modèle d'A.Lausetti (avec $k_p = 2 \, 10^{-4}$) est le plus cohérent avec l'ESDU. De plus, il dépend de la pression des pneus qui semble un paramètre influent. c'est pourquoi, nous allons nous baser sur ce modèle pour en élaborer un autre, plus sophistiqué, et encore plus cohérent avec l'ESDU considéré comme modèle de référence.

CE QU'IL FAUT RETENIR A.3 Le coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r augmente quand la vitesse V de roulage de l'avion augmente. Autrement dit, plus l'avion va vite, plus la résistance au roulement est grande.

Modélisons le coefficient de frottement statique pneu/piste en roue libre $\mu_r(V=0)$. Pour la comparaison des modèles, la valeur considérée de ce coefficient pour le modèle A.Lausetti était celle de l'exemple numérique de l'ESDU. Nous nous proposons de le

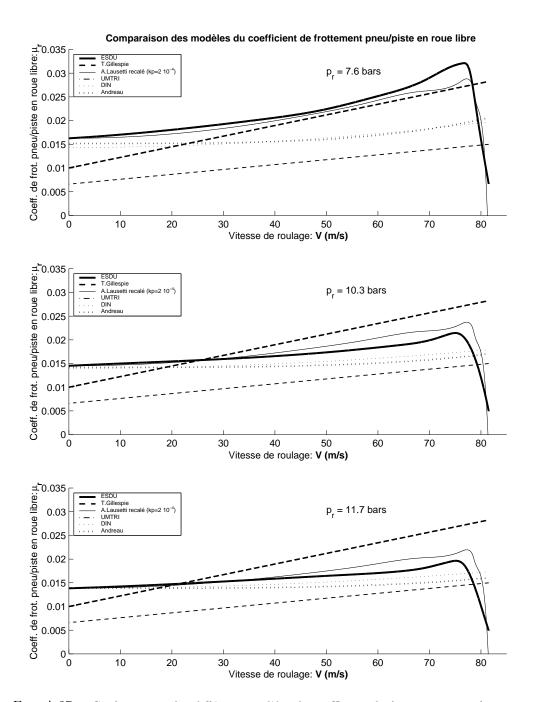


FIG. A.27 – Confrontation des différents modèles du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r pour les cas numériques proposés par l'ESDU (Figure A.14, p. 276). Les modèles de T.Gillespie et UMTRI sont indépendants de la pressions de pneumatiques c'est pourquoi ils sont identiques sur les trois graphiques. Pour que le modèle d'A.Lausetti soit cohérent, une valeur de $k_p = 2\,10^{-4}$ a été considéré (Figure A.15, p. 277).

modéliser, sachant qu'il semble dépendre de la pression de pneu. Le modèle d'Andreau avait par contre son propre modèle de $\mu_r(V=0)$ et de plus il était très cohérent avec l'ESDU (Figure A.27, p. 289). Nous proposons de reprendre la forme analytique du modèle d'Andreau, pour modéliser le coefficient de frottement statique $\mu_r(V=0)$, soit une expression de la forme :

$$\mu_r(V=0) = \frac{a}{p_r{}^n} + b$$

Les coefficients a et b sont déterminés par une optimisation qui minimise l'erreur avec les valeurs de l'ESDU par la méthode des moindres carrés.

Le modèle original d'Andreau propose une valeur de l'exposant n=0.64, ce que nous avons testé (Figure A.28, p. 290), mais l'exposant n=0.5 semble tout aussi bien fonctionner en plus de sa simplicité analytique. C'est donc le modèle suivant que nous retiendrons :

$$\mu_r(V=0) = \frac{10.8}{\sqrt{p_r}} + 0.0039$$

Ce modèle a l'avantage de dépendre de la pression des pneus. Son inconvénient est qu'il n'est valable que pour une piste sèche standard, et n'est donc pas applicable pour les pistes glacée, herbeuses ou mouillée.

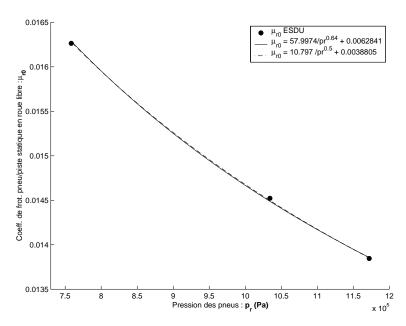


FIG. A.28 – Modélisation du coefficient de frottement statique pneu/piste en roue libre $\mu_r(V=0)$, en fonction de la pression des pneumatiques, sous une forme analytique similaire à celle du modèle d'Andreau (Equation A.9, p. 281).

Affinons maintenant la pente du coefficient de frottement pneu/piste en fonction de la vitesse. La valeur de $k_p=2\,10^{-4}$ du modèle d'A.Lausetti, avait été choisie de manière à minimiser l'erreur avec l'ESDU pour l'ensemble des pressions des pneus (Figure A.15, p. 277). Malheureusement la valeur optimale de ce coefficient k_p dépend de la pression de pneus p_r . Par exemple la valeur optimale pour la pression pneu $p_r=11.7\,bars$ est de $k_p=1.5\,10^{-4}$, mais appliqué une telle valeur à k_p pour les autres pressions 7.6 et 10.3

bars, entraı̂ne des erreurs non négligeables. Par conséquent, nous proposons de recaler en fonction de la pression p_r , le terme k_p du modèle original d'A.Lausetti. Prenons la valeur de $k_p=1.5\ 10^{-4}$ qui est optimale pour $p_r=11.7\ bars$, et proposons un terme correctif fonction de la pression qui ne modifie pas le modèle de μ_r pour cette pression; par exemple un terme multiplicatif en : $\left(\frac{p_{r,11.7\ bars}}{p_r}\right)^N$. Une optimisation numérique par les moindres carrés pour minimiser l'erreur relative avec le modèle de l'ESDU donne la valeur de N=1.0894, soit finalement le modèle de μ_r suivant :

$$\mu_r = \left(\frac{10.8}{\sqrt{p_r}} + 0.0039\right) + \left(\frac{p_{r,11.7\;bars}}{p_r}\right)^{1.0894} \frac{1.5\,10^{-4}}{p_r\,D_r^{\,3}\,g\,n_r} \left(M_{{}^{MTOW}}g - \frac{1}{2}\rho SV^2Cz_r\right)V^2(\text{A}.11)$$

Avec:

: Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre : Vitesse de l'avion par rapport à la piste : Pression des pneumatiques $Pa = N/m^2$ $p_{r,11.7\;bars}$: Pression p
neu de 11.7 bars soit 11.7 $10^5\;Pa$ $Pa = N/m^2$: Diamètre des roues : Constante de gravité terrestre $q = 9.81 \ m/s^2$: Nombre de roues de l'avion M_{MTOW} : Masse de l'avion : Masse volumique de l'air (1.225 à altitude nulle) kg/m^3 \dot{S} : Surface voilure de l'avion Cz_r : Coefficient de portance au roulage

Le modèle ainsi obtenu est cohérent avec les autres modèles (Figure A.29, p. 292). Il se rapproche mieux du modèle de l'ESDU que le modèle d'A.Lausetti recalé avec $k_p = 2\,10^{-4}$ (Figure A.27, p. 289), tout en étant un modèle autonome, fonction de la pression des pneumatiques.

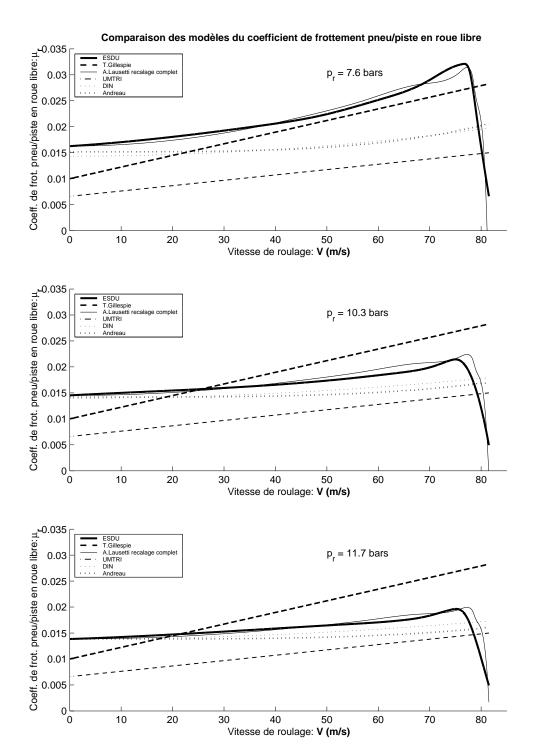


FIG. A.29 – Confrontation des modèles existants du coefficient de frottement pneu/piste en roue libre μ_r avec le modèle que nous proposons : "A.Lausetti recalage complet" (Equation A.11, p. 291).

Conclusion : Modèle proposé du coefficient de frottement pneu/piste $\mu(V)$

Modèle du coefficient de frottement pneu/piste en fonction de la vitesse avion

Au freinage:

$$\mu_f \quad = \frac{\mu_f(V=0)}{1 + \frac{V}{107 \left(\mu_f(V=0)\right)^2 - 12.5 \; \mu_f(V=0) + 24.5}}$$

En roue libre

$$\mu_r = \frac{\mu_{r0,L}}{0.015} \left(\frac{10.8}{\sqrt{p_r}} + 0.0039 \right) + \left(\frac{11.7 \ 10^5}{p_r} \right)^{1.0894} \frac{1.5 \ 10^{-4}}{p_r \ D_r{}^3 \ g \ n_r} \left(mg - \frac{1}{2} \rho SV^2 C z_r \right) V^2$$

Mode d'obtention : Modèles élaborés à partir de la structure analytique proposée par A.Lausetti ((Equation A.4, p. 273) en roue libre, et (Equation A.3, p. 272) au freinage), et recalés sur des données.

Pour le modèle de freinage, la vitesse W du modèle d'A. Lausetti qui dépend de l'état de la piste, a été modélisée à l'aide des données d'A. Lausetti, par une fonction du coefficient de frottement statique pneu/piste $\mu_f(V=0)$ (Figure A.25, p. 287).

Pour le roulage en roue libre, le modèle d'origine d'A. Lausetti est recalé sur les données expérimentales de l'ESDU; et le coefficient de frottement statique pneu/piste en roue libre $\mu_r(V=0)$ est modélisé en fonction de la pression des pneumatiques par une structure analytique similaire à celle proposée par Andreau (Equation A.9, p. 281) et ajustée aux données ESDU.

Domaine de définition: Les structures analytiques du modèle d'A.Lausetti suggèrent une application à toutes sortes de natures et états de piste, et une application à divers pneumatiques d'avions de transport civil (par la prise en compte de la pression des pneus). Cela dit, je resterai prudente quant au domaine de validité effectif du modèle final, car le modèle n'a pu être validé que sur les données dont nous disposions, à savoir un avion de transport civil roulant sur une piste standard.

Précision: Erreur du pour-cent par rapport aux données ESDU pour le modèle en roue libre (Figure A.29, p. 292). Le modèle au freinage a été conçu pour correspondre exactement aux données d'A.Lausetti (Figure A.25, p. 287), et reste cohérent par rapport aux autres modèles (FAR, ESDU) sur piste mouillée (Figure A.24, p. 286).

Variables :

Symboles: Désignation Unités Cz_r : Coefficient de portance au roulage D_r : Diamètre des roues g: Constante de gravité terrestre $g = 9.81 \, m/s^2$ m/s^2 m: Masse de l'avion n_r : Nombre de roues de l'avion $Pa = N/m^2 \\ m^2$ p_r : Pression des pneumatiques ${\cal S}$: Surface voilure de l'avion $V \colon \mathbf{Vitesse}$ de l'avion par rapport à la piste μ_f : Coefficient de frottement pneu/piste au freinage, fonction de la vitesse $\mu_f(V=0)$: Coefficient de frottement statique pneu/piste au freinage, c'est-à-dire à vitesse nulle μ_r : Coefficient de frottement pneu/piste en roue libre, fonction de la vitesse $\mu_{r\,0,L}$: Coefficient de frottement statique pneu/piste en roue libre, à vitesse nulle, du modèle d'A.Lausetti (Table A.2, p. 273)

 ρ : Masse volumique de l'air (1.225 à altitude nulle)

Tab. A.4 – Modèle proposé du coefficient de frottement pneu/piste

 kg/m^3

A.6 Modèle simple à accélération moyenne du roulage

Un modèle simple de la longueur de piste consiste à considérer que l'accélération de l'avion est constante durant le roulage.

Ce type de modèle est bien évidemment moins précis que les modèles que nous proposons dans le document principal mais à l'avantage d'être très simple d'utilisation.

Une valeur moyenne de l'accélération est généralement prise correspondant à la valeur réelle de l'accélération à une vitesse de $0.7V_R$ au décollage ou $0.7V_{TD}$ à l'atterrissage.

Dans cette section, nous vérifierons si cette valeur moyenne de l'accélération est judicieuse après avoir exposé l'expression analytique de ce modèle simple du roulage.

A.6.1 Expression analytique du modèle simple à accélération moyenne du roulage

Le modèle simple du roulage consiste à considérer l'accélération Γ constante. Or, par définition l'accélération avion est la dérivée temporelle de la vitesse V, et la dérivée seconde de l'abscisse de l'avion X. En partant de ces définitions, nous pouvons exprimer la longueur de roulage en fonction de la vitesse initiale V_i et la vitesse finale V_f :

$$\Gamma = cte = \frac{dV}{dt}$$

$$V = \Gamma t + V_i \qquad \Rightarrow t = \frac{V - V_i}{\Gamma}$$

$$X = \frac{1}{2}\Gamma t^2 + V_i t + X_i$$

$$X - X_i = \frac{1}{2}\Gamma \left(\frac{V - V_i}{\Gamma}\right)^2 + V_i \frac{V - V_i}{\Gamma} = \frac{V^2 - V_i^2}{2\Gamma}$$

$$L_{p_r} = X_f - X_i$$

$$\left[L_{p_r} = \frac{V_f^2 - V_i^2}{2\Gamma}\right]$$
(A.12)

A.6.2 Quelle accélération moyenne considérer?

En réalité, l'accélération de l'avion varie durant le roulage, car la poussée et la traînée varient en fonction de la vitesse de l'avion. Une expression analytique de cette accélération réelle a été déterminée (Equation 6.4, p. 120). Dans le modèle simple du roulage, l'accélération avion est considérée constante, alors quelle valeur de l'accélération choisir? La valeur de l'accélération réelle prise à une vitesse $V=0.7V_R$ (ou $0.7V_{TD}$) est couramment utilisée. Vérifions si cela est judicieux.

Prenons le cas de l'A300 au décollage et à l'atterrissage. Calculons la longueur de roulage par ce modèle simple et comparons-le (Figure A.30, p. 296) avec la longueur de roulage de référence, c'est-à-dire celle du modèle de résolution cinétique (Table 6.3, p. 134).

Pour le décollage sans panne moteur (AEO All Engines Operating), la vitesse initiale est nulle (arrêt de l'avion), et la vitesse finale est la vitesse de rotation V_R .

$$L_{p_{rAEO}} = \frac{{V_R}^2}{2\Gamma}$$

Considérer l'accélération moyenne comme étant l'accélération réelle calculée à $0.7V_R$ convient effectivement bien car l'erreur d'estimation est de 0.2% pour la configuration de becs/volets de décollage de l'A300 (conf.1).

Pour le décollage avec panne moteur (OEI One Engine Inoperative), le calcul doit se scinder en deux : une première phase avec tous les moteurs de 0 à V_{EF} , la deuxième phase avec un moteur en moins de V_{EF} à V_R . La longueur de roulage sera la somme des deux longueurs calculées.

$$L_{p_{rOEI}} = \frac{{V_{EF}}^2}{2\Gamma} + \frac{{V_R}^2 - {V_{EF}}^2}{2\Gamma_{(N_m - 1)}}$$

Considérer les accélérations moyennes comme étant les accélération réelles calculée à $0.7V_{EF}$ pour la première phase, et à $V_{EF} + 0.7 (V_R - V_{EF})$ permet d'estimer la longueur de roulage avec panne moteur avec une erreur relative de 2.7%. Prendre une valeur de 0.79 au lieu de 0.7 permettrait d'améliorer les estimations.

Pour l'atterrissage, la vitesse initiale est la vitesse de toucher des roues V_{TD} , et la vitesse finale est nulle puisque l'avion finit à l'arrêt.

$$L_{p_{rAtt}} = \frac{-V_{TD}^2}{2\Gamma}$$

REMARQUE A.7 Cette longueur de roulage est belle est bien positive puisqu'au freinage, l'accélération avion est négative.

Considérer l'accélération moyenne comme étant l'accélération réelle calculée à $0.7V_{TD}$ convient parfaitement pour la configuration de becs/volets de décollage de l'A300 (conf.1 qui est également la configuration du décollage interrompu RTO Rejected-TakeOff). Pour la configuration d'atterrissage (conf.4), l'erreur d'estimation est de 2.9%, une valeur de 0.74 serait préférable.

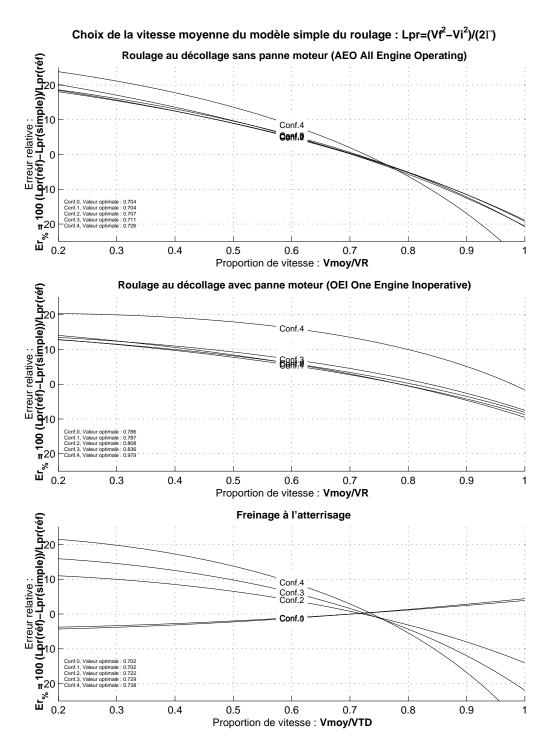


FIG. A.30 – Erreur relative d'estimation des longueurs de roulage du modèle simple (Equation A.12, p. 294) par rapport au modèle de résolution cinétique (Table 6.3, p. 134), selon les vitesses moyennes à laquelle l'accélération est calculée pour le modèle simple.

A.6.3 Conclusion : modèle simple du roulage à accélération constante

Modèle simple de la longueur de piste au roulage L_{p_r} pour une accélération avion supposée constante

$$L_{p_r} = \frac{V_f^2 - V_i^2}{2\Gamma}$$

Mode d'obtention : Analytique, en supposant l'accélération de l'avion constante durant tout le roulage. Les valeurs des vitesses pour lesquelles l'accélération moyenne doit être calculée, ont été optimisées pour retrouver les performances de l'A300 avec notre modèle de résolution cinétique de longueur de roulage (Table 6.3, p. 134).

Domaine de définition : Tout avion au roulage.

Précision : Choisir une valeur de l'accélération moyenne Γ peut induire des erreurs pouvant atteindre 20%. Cependant en prenant une valeur judicieuse, les estimations de ce modèles deviennent tout à fait correctes. Pour un A300, les valeurs optimales (qui correspondent à une erreur d'estimation nulle des longueurs de roulage) sont :

Décollage sans panne (AEO) : entre 0 et V_R , considérez $\Gamma = \Gamma(0.704V_R)$

Décollage avec panne (OEI) : entre 0 et V_{EF} , considérez $\Gamma = \Gamma(0.787V_{EF})$ et entre V_{EF} et V_R , considérez $\Gamma_{(N_m-1)} = \Gamma_{(N_m-1)} \left(V_{EF} + 0.787(V_R - V_{EF})\right)$

Décollage interrompu (RTO) : considérer $\Gamma = \Gamma(0.702V_1)$

Atterrissage: entre V_{TD} et l'arrêt V = 0, considérez $\Gamma = \Gamma(0.738V_{TD})$

Si vous n'utilisez pas les valeurs optimisées et que vous calculez l'accélération moyenne à $0.7V_R$ (ou $0.7V_{TD}$), vous ferez une erreur de 0.2% au décollage sans panne, 2.7% pour le décollage avec panne, et 2.9% à l'atterrissage.

Variables

Symboles : Désignation	Unités
V_i, V_f : Vitesse initiale V_i et finale V_f de la portion de roulage	m/s
étudiée.	
V_{EF} : Vitesse où apparaît la panne d'un des moteurs (Section	m/s
2.2.4, p. 47)	
V_1 : Vitesse de décision (Section 2.2.5, p. 48)	m/s
V_R : Vitesse de rotation (Section 2.2.6, p. 50)	m/s
V_{TD} : Vitesse de toucher des roues à l'atterrissage	m/s
Γ : Accélération de l'avion en son centre de gravité, par rap-	m/s^2
port à la piste, supposée constante. Sa valeur est prise	
égale à celle de l'accélération réelle (Equation 6.4, p. 120)	
calculée à une vitesse de référence $\Gamma = \Gamma(V_{ref})$	

TAB. A.5 – Modèle simple, qui suppose l'accélération constante, de la longueur de roulage

Annexe B

Précision sur la phase aérienne

Sommaire

B.1	Pente d'équilibre $\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)$ lorsque l'assiette de montée θ_2 est
	imposée
B.2	Critère de rentrée du train d'atterrissage 302
B.3	Confrontation des modèles de longueur de piste aérienne . 303

B.1 Pente d'équilibre $\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)$ lorsque l'assiette de montée θ_2 est imposée

La loi d'assiette (Table 3.1, p. 74) impose une assiette de montée θ_2 qui, en cas de panne moteur (OEI One Engine Inoperative), lorsque le train est rentré, permet d'obtenir la pente minimale de montée γ_{mini} (2.4% pour les bimoteurs), imposée par la norme FAR 25.111(e).

Nous allons calculer la pente $\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)$ qui serait obtenue si cette assiette de montée θ_2 était maintenue suffisamment longtemps pour que l'avion atteigne l'état d'équilibre, train sorti, avec ou sans panne moteur.

C'est cette pente $\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2)$ qui est souvent utilisée pour la modélisation de la phase aérienne sous forme d'arrondi circulaire et de montée rectiligne.

Pour des pentes γ modérées, les équations de dynamique du vol longitudinal à l'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta_2 &= \alpha + \gamma \\ mg &= \frac{1}{2}\rho SV^2Cz \\ F_{max} = \gamma mg + \frac{1}{2}\rho SV^2Cx \\ Cx &= Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + k_iCz^2 \\ Cz &= Cz_{\alpha} \left(\alpha - \alpha_0\right) \end{cases}$$

L'équation de moment de tangage n'est pas rappelée ici, parce qu'elle est contrôlée par la loi d'assiette qui assure la gouverne de profondeur δ_m adéquate pour maintenir l'assiette de montée θ_2 .

Nous avons donc à notre disposition 5 équations, pour 5 inconnues : l'incidence α , la pente γ , la vitesse V, et les coefficients aérodynamiques de portance Cz et de traînée Cx

La manipulation des équations de ce système permettent d'abord de déduire l'incidence α :

$$\frac{F_{max}}{mg} = \frac{1}{f} + \gamma$$

$$= \frac{Cx}{Cz} + \gamma$$

$$= \frac{Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + k_i Cz^2}{Cz} + (\theta_2 - \alpha)$$

$$= \frac{Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + k_i Cz\alpha^2 \overline{\alpha}^2}{Cz\alpha \overline{\alpha}} + (\theta_2 - \alpha_0 - \overline{\alpha}) \quad \text{en notant } : \overline{\alpha} = \alpha - \alpha_0$$

$$\frac{F_{max}}{mg} Cz\alpha \overline{\alpha} = (Cx_o + \Delta Cx_{oTrain}) + k_i Cz\alpha^2 \overline{\alpha}^2 + (\theta_2 - \alpha_0) Cz\alpha \overline{\alpha} - Cz\alpha \overline{\alpha}^2$$

$$0 = \underbrace{Cz\alpha (k_i Cz\alpha - 1)}_{A} \overline{\alpha}^2 + \underbrace{Cz\alpha \left(\theta_2 - \alpha_0 - \frac{F_{max}}{mg}\right)}_{B} \overline{\alpha} + \underbrace{(Cx_o + \Delta Cx_{oTrain})}_{C}$$

Remarque B.1 Afin de simplifier le calcul et d'éviter un rebouclage, la poussée F_{max} pourra être assimilée à la poussée à V_2 .

Ce polynôme d'ordre 2 en incidence $\overline{\alpha}=\alpha-\alpha_0$ a deux solutions mathématiques $\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ et $\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$. Seule l'une d'entres elles est l'incidence d'équilibre physiquement admissible pour notre étude du décollage. Le coefficient de traînée induite

 $k_i \approx \frac{1}{\pi\lambda}$ étant de l'ordre de 0.04 et le gradient de portance étant de l'ordre de $Cz_{\alpha} = 5$, alors $k_iCz_{\alpha} - 1 < 0$: le coefficient A est donc négatif. La racine $\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ est donc supérieure à la racine $\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$. Or, le décollage se fait à des vitesses les plus faibles possibles, inférieures à la vitesse de finesse maximale, donc à des incidences les plus élevées (Figure B.1, p. 301).

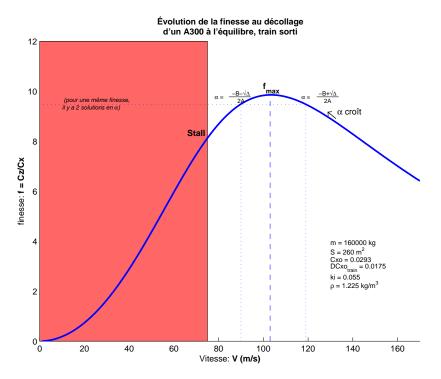


FIG. B.1 – Finesse de décollage à l'équilibre $f = \frac{Cz}{Cx} = \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho S(Cx_o + \Delta Cx_o T_{rain})V^2 + k_i \frac{(mg)^2}{\frac{1}{2}\rho SV^2}}$

Par conséquent, l'incidence d'équilibre sera donnée par la racine la plus élevée $\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{-Cz\alpha\left(\theta_2 - \alpha_0 - \frac{F_{max}}{mg}\right) - \sqrt{Cz\alpha^2\left(\theta_2 - \alpha_0 - \frac{F_{max}}{mg}\right)^2 - 4Cz\alpha\left(k_iCz\alpha - 1\right)}}{2Cz\alpha\left(k_iCz\alpha - 1\right)\left(Cx_o + \Delta Cx_{oTrain}\right)}$$

La pente à l'équilibre $\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2) = \theta_2 - \alpha$ étant la différence de l'assiette de montée θ_2 et de cette incidence α , son expression est finalement donnée par :

$$\gamma_{\text{\'eq}}(\theta_2) = \theta_2 - \alpha_0 + \frac{\theta_2 - \alpha_0 - \frac{F_{max}}{mg} + \sqrt{\left(\theta_2 - \alpha_0 - \frac{F_{max}}{mg}\right)^2 - 4\frac{\left(k_i C z \alpha - 1\right)}{C z \alpha}}}{2\left(k_i C z \alpha - 1\right)\left(C x_o + \Delta C x_{oTrain}\right)}$$

Ceci a été démontré pour le cas d'un décollage sans panne moteur (AEO : All Engines Operating). Pour le cas de panne moteur (OEI : One Engine Inoperative) au décollage, il suffit d'adapter la poussée d'équilibre (réduite de $\frac{N_m-1}{N_m}$) et de tenir compte de la traînée supplémentaire engendrée par le moteur en panne, tournant en moulinet $\Delta Cx_{omoulinet}$.

Ce qui permet d'aboutir à la pente d'équilibre en montée en cas de panne moteur :

$$\gamma_{\text{éq}}(\theta_2) = \theta_2 - \alpha_0 + \frac{\theta_2 - \alpha_0 - \frac{N_m - 1}{N_m} \frac{F_{max}}{mg} + \sqrt{\left(\theta_2 - \alpha_0 - \frac{N_m - 1}{N_m} \frac{F_{max}}{mg}\right)^2 - 4\frac{\left(k_i Cz\alpha - 1\right)}{Cz\alpha}}}{2\left(k_i Cz\alpha - 1\right)\left(Cx_o + \Delta Cx_{oTrain} + \Delta Cx_{omoulinet}\right)}$$

REMARQUE B.2 Cette pente d'équilibre en montée $\gamma_{\text{éq}}(\theta_2)$ avec panne moteur est différente de la pente minimale γ_{mini} (2.4% pour les bimoteurs), exigée par la norme FAR 25.111(e). Pour ce calcul à l'équilibre, le train est considéré comme sorti, ce qui n'est pas le cas pour la γ_{mini} exigée par la norme.

B.2 Critère de rentrée du train d'atterrissage

Pour un avion de type A300, l'augmentation du coefficient de traînée créée par le train ΔCx_{oTrain} , est du même ordre de grandeur que le coefficient de traînée à Cz nul de l'avion lisse Cx_o . Autant dire qu'entre l'avion train rentré et l'avion train sorti, les performances vont être affectée par la différence de traînée. Il est donc important de connaître à quel moment le train est rentré au cours du décollage.

Le but de ce paragraphe est de faire la synthèse des informations concernant la rentrée du train au décollage, afin de déterminer s'il faut tenir compte de la rentrée du train dans nos simulations numériques.

La norme FAR 25 impose seulement de ne pas rentrer le train avant la vitesse de décollage "lift-off" V_{LOF} .

"... However, landing gear retraction may not be begun until the airplane is airborne."

E.Torenbeek [Tor86] (p.575 figure K-1) montre que le train est rentré avant 35ft.

Une figure (p.7, figure 1) du rapport [CL00] semble indiquer que le début de rentrée du train se fait à la vitesse de sécurité au décollage V_2 .

Le pilote d'essai Jacques Rosay [Ros99] indique que le train commence à rentrer 3 secondes après le "lift-off".

Le pilote d'AirFrance Jean-Yves Boiffier [Boi05] indique que la procédure AirFrance est de rentrer le train dès que la vitesse verticale V_z est positive. Il indique également que pour certains avions qui ont un train rentrant lentement, comme le B747, le train peut ne pas être tout à fait rentré au passage des 400 ft.

Les simulations de décollage pour un avion de type A300 montrent qu'il s'écoule seulement quelques secondes entre le moment où l'avion quitte le sol à la vitesse de décollage V_{LOF} , et le moment où l'avion passe la hauteur de sécurité h_s (hauteur à laquelle, le calcul de la longueur de piste s'arrête) : de l'ordre de 3 secondes pour la phase aérienne sans panne moteur (AEO) et 4 à 7 secondes avec panne moteur (OEI). Par conséquent, la rentrée du train actionnée à ou au delà de V_{LOF} , ne peut pas permettre au train d'être entièrement rentré au passage de la hauteur de sécurité. Nous avons donc décidé que pour nos simulations de décollage, le train serait considéré comme sorti jusqu'à la fin (passage de h_s).

B.3 Confrontation des modèles de longueur de piste aérienne

Les figures qui suivent (Figures B.2, B.3, B.4 et B.5), montrent les évolutions de la longueur de piste aérienne $L_{p_{\text{air}}}$ en fonction des taux de propulsion avion $\frac{F_0}{mg}$ et des finesses f de croisière, pour les différents modèles :

- les simulations numériques (Section 4, p. 83) basées sur une loi de pilotage en assiette représentative des directives de pilotage AirFrance,
- notre modèle de longueur de piste aérienne modélisée sous forme d'un arrondi circulaire sous facteur de charge n_z et d'une montée rectiligne de pente γ_{dec} (n_z et γ_{dec} sont fonction des taux de propulsion, charge alaire et finesse de l'avion (Section 7.2.3, p. 209)),
- le modèle existant (Section 7.2.1, p. 203) de longueur de piste aérienne sous forme d'arrondi circulaire de facteur de charge constant quel que soit l'avion ($n_z = 1.05$ en cas de panne moteur et $n_z = 1.15$ sans panne moteur) et d'une montée rectiligne de pente $\gamma_{\text{eq}}(\theta_2)$ (Appendix B.1, p. 300) calculée en considérant l'avion à l'équilibre.

Ces figures mettent aussi en évidence le fait que le modèle existant (à nz constant et pente de montée calculée à l'équilibre $\gamma_{\text{éq}}(\theta_2)$ (Section 7.2.1, p. 203)) est inadapté, et que notre modèle est par contre fidèle aux simulations numériques.

Confrontation des modèles de longueur de piste aérienne Lp_{air} Sans panne moteur (AEO :All Engines Operating)

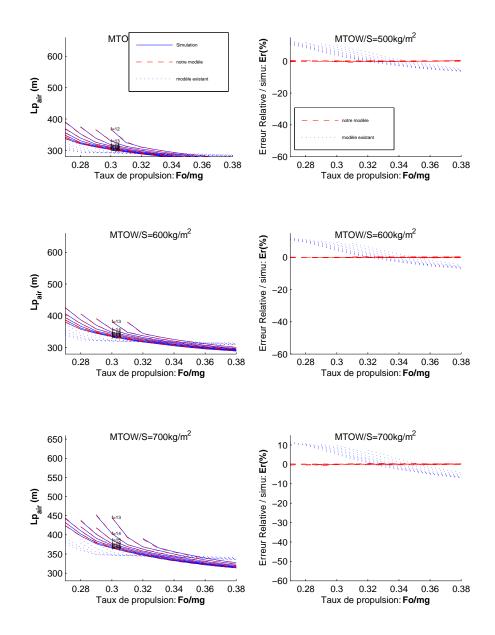


FIG. B.2 – Longueur de piste parcourue durant la phase aérienne (entre V_{LOF} et le passage de la hauteur de sécurité h_s) : des simulations numériques, de notre modèle (Table 7.1, p. 202) et du modèle existant ($n_z = 1.15$ et γ_{dec} calculée à l'équilibre (Appendix B.1, p. 300)).

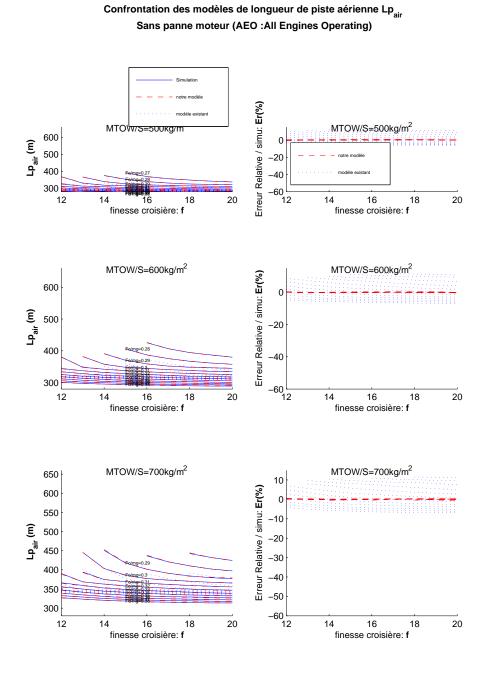


FIG. B.3 – Longueur de piste parcourue durant la phase aérienne (entre V_{LOF} et le passage de la hauteur de sécurité h_s) : des simulations numériques, de notre modèle (Table 7.1, p. 202) et du modèle existant ($n_z = 1.15$ et γ_{dec} calculée à l'équilibre (Appendix B.1, p. 300)).

MTOW/S=500kg/m² Erreur Relative / simu: Er(%) 600 Lp_{air} (m) 500 20 400 300 -60 0.36 0.38 0.28 0.28 0.3 0.32 0.34 0.36 0.38 0.3 0.32 0.34 Taux de propulsion: Fo/mg Taux de propulsion: Fo/mg MTOW/S=600kg/m² MTOW/S=600kg/m² Erreur Relative / simu: Er(%) 600 Lp_{air} (m) 500 -20 400 -40 300 -60 0.34 0.28 0.38 0.28 0.3 0.32 0.36 0.3 0.32 0.34 0.36 Taux de propulsion: Fo/mg Taux de propulsion: Fo/mg MTOW/S=700kg/m² MTOW/S=700kg/m² 650 10 Erreur Relative / simu: Er(%) 600 550 -10 Lp_{air} (m) 500 -20 450 -30 400 -40 350 -50 300 -60

Confrontation des modèles de longueur de piste aérienne Lp_{air} Avec panne moteur (OEI :One Engine Inoperative)

FIG. B.4 – Longueur de piste parcourue durant la phase aérienne (entre V_{LOF} et le passage de la hauteur de sécurité h_s) : des simulations numériques, de notre modèle (Table 7.1, p. 202) et du modèle existant ($n_z = 1.05$ et γ_{dec} calculée à l'équilibre (Appendix B.1, p. 300)).

0.32

Taux de propulsion: Fo/mg

0.34

0.32

Taux de propulsion: Fo/mg

0.34

0.36

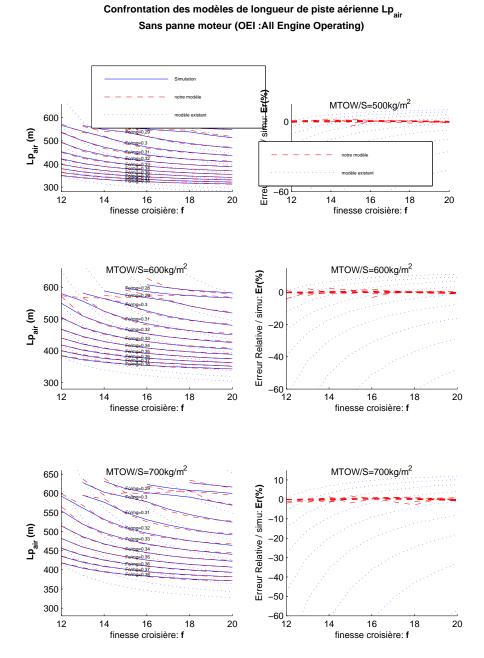


FIG. B.5 – Longueur de piste parcourue durant la phase aérienne (entre V_{LOF} et le passage de la hauteur de sécurité h_s) : des simulations numériques, de notre modèle (Table 7.1, p. 202) et du modèle existant ($n_z = 1.05$ et γ_{dec} calculée à l'équilibre (Appendix B.1, p. 300)).

Annexe C

Méthode d'identification

ommaire
C.1 Qu'est-ce qu'un modèle identifié?
C.2 Outils d'identification
C.2.1 La fonction "Isquonlin" de Matlab
C.2.2 Importance des valeurs initiales d'optimisation 311
C.3 Méthode d'identification

Au cours de cette thèse, nous avons mis au point plusieurs modèle dits "identifiés". Ce chapitre a pour but d'exposer ce qu'est un modèle identifié, et la méthode employée pour l'élaborer.

C.1 Qu'est-ce qu'un modèle identifié?

Nous appelons modèle "identifié" un modèle dont l'expression analytique a été choisie pour décrire au mieux des données de référence.

Considérons les données y_{data} correspondant aux abscisses x_{data} . Cherchons une fonction y = f(x) qui permet de décrire au mieux des données, c'est-à-dire dont les estimations $f(x_{data})$ sont proches des données y_{data} .

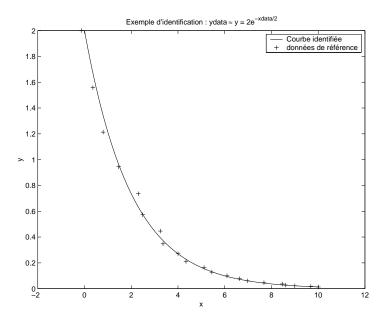


Fig. C.1 – Exemple d'identification d'une fonction $y = K_1 e^{K_2 x}$, sur des données (x_{data}, y_{data})

Il faut donc choisir une forme d'expression analytique de la fonction f, par exemple $y=K_1\ e^{K_2\ x}$ (Figure C.1, p. 310). Identifier cette fonction f sur les données, revient à chercher les coefficients optimaux K_1 et K_2 , qui minimisent l'erreur entre les données y_{data} et les estimations par la fonction $f(x_{data})=K_1\ e^{K_2\ x_{data}}$.

L'exemple choisie est relativement simple, mais il en va de même pour des modèles plus sophistiqués, où y_{data} est fonction de plusieurs variables $x_{data,1}$, $x_{data,2}$, $x_{data,3}$, ... comme par exemple $y = K_1 x_{data,1} e^{K_2 x_{data,1}} + K_3 x_{data,3}$.

C.2 Outils d'identification

Afin de trouver les coefficients K_i optimaux de l'expression analytique à identifier, plusieurs méthodes existent. Nous utilisons la méthode des moindres carrés. Le logiciel MATLAB comporte des fonctions d'optimisation utilisant ces méthodes, telle que la fonction "lsquonlin" que nous utilisons pour l'élaboration de nos modèles identifiés.

C.2.1 La fonction "lsqnonlin" de Matlab

La fonction "Isquonlin" du logiciel MATLAB permet l'identification d'expressions analytiques non linéaires par la méthode des moindres carrés. C'est cette fonction que nous utilisons pour mettre au point nos modèles identifiés.

Pour s'en servir, il faut d'abord créer un fichier qui définit la forme de l'expression analytique (par exemple $y = K_1 e^{K_2 x}$) que l'on souhaite identifier (c'est-à-dire dont on souhaite trouver les coefficients K_1 et K_2 optimaux).

Après avoir défini des valeurs initiales Ko_1 et Ko_2 pour débuter l'optimisation des coefficients K_1 et K_2 , l'identification par les moindres carrés se fait ensuite à l'aide de la fonction "lsqnonlin" qui appelle le fichier MaFonctionAIdentifier.m que l'on vient de créer. La syntaxe à employer est la suivante :

```
\begin{tabular}{ll} \hline ProgrammedIdentification.m \\ \hline \% \ déclaration \ des \ variables \ en \ global \ pour \ que \ la \\ \% \ fonction \ MaFonctionAIdentifier.m \ puisse \ en \ connaître \ les \ valeurs \\ global \ ydata \\ global \ ydata \\ global \ xdata \\ \hline \% \ Exemples \ de \ données \ (issues \ de \ mesures \ expérimentales \ ou \ bien \ d'un \ modèle): \\ xdata=[-0.13\ 0.36\ 0.8\ 1.46\ 2.3\ 2.49\ 3.25\ 3.36\ 4\ 4.34\ 5.12\ 5.45\ 6.1\ 6.63\ 6.98\ 7.68\ 8.46\ 8.6\ 9\ 9.68\ 10.01]; \\ ydata=[2\ 1.99\ 1.98\ 1.97\ 1.96\ 1.95\ 1.94\ 1.93\ 1.92\ 1.91\ 1.9\ 1.89\ 1.88\ 1.87\ 1.86\ 1.86\ 1.85\ 1.84\ 1.83\ 1.82\ 1.81]; \\ \% \ Valeurs \ initiales \ d'optimisation: \\ Ko(1)=1.7; \\ Ko(2)=-0.55; \\ \% \ Optimisation \ par \ les \ moindres \ carrés: \\ K = \ lsqnonlin('MaFonctionAIdentifier',Ko); \\ disp('Les \ valeurs \ optimales \ sont:') \\ K(1) \\ K(2) \\ \end{tabular}
```

En exécutant le programme ProgrammedIdentification.m, les valeurs optimales K_i seront déterminées à l'aide de "Isqnonlin". Cet exemple est donné pour une expression analytique fonction que d'une seule variable xdata, mais il en va de même pour les fonctions à plusieurs variables.

C.2.2 Importance des valeurs initiales d'optimisation

Les valeurs initiales d'optimisation Ko_i doivent être judicieusement choisies. Si elles sont trop éloignées des valeurs optimales K_i que l'on cherche, il est possible que la fonction "Isquonlin" renvoie une erreur car n'arrive pas à converger vers la solution. Si au contraire, elles sont choisies trop proches des valeurs optimales K_i , il arrive parfois que le résultat donnés par "Isquonlin" donnent de moins bonnes estimations avec les K_i qu'avec les valeurs initiales Ko_i . J'avoue que je ne sais pas pourquoi, mais c'est ce que j'ai pu observer.

En pratique, on détermine à la main des valeurs initiales Ko_i pour débuter l'optimisation, en prenant par exemple autant de points (xdata,ydata) qu'il y a de K_i à déterminer, et en résolvant manuellement le systèmes de ces i équations à K_i inconnus.

Une fois les Ko_i ainsi déterminés, on utiliser la fonction "lsquonlin" qui donne des valeurs de K_i optimales. On reprend ces valeurs K_i que l'on considère maintenant comme les valeurs initiales Ko_i d'une prochaine optimisation, et on recommence à optimiser. On procède de la sorte jusqu'à ce que les K_i fournis ne procurent pas de meilleurs estimations que les Ko_i considérés. En général, une à deux fois suffisent pour trouver les meilleures valeurs de K_i .

C.3 Méthode d'identification

Outre le choix judicieux des valeurs initiales d'optimisation comme nous venons de le voir, tout l'art de l'identification réside dans le choix de l'expression analytique du modèle à identifier. Bien entendu, plus le nombre de coefficient K_i se rapproche du nombre de données ydata, plus le modèle identifié sera meilleur, mais la simplicité de l'expression analytique du modèle à identifier est souvent un critère important (c'est-à-dire un faible nombre de coefficient K_i). Le choix d'une expression analytique simple mais adaptée doit donc être fait.

Il n'existe pas de recette miracle pour choisir l'expression analytique du modèle à identifier, l'expérience et l'intuition aident beaucoup à faire ce choix. Malheureusement, il n'est pas toujours évident d'avoir une idée de la forme de l'expression analytique adaptée. C'est pourquoi je vous propose la méthode suivante, que j'ai adopté pour élaborer mes modèles, et qui permet d'aider à faire ce choix.

- Tracer la grandeur à modéliser y_{data} en fonction de tous les paramètres $x_{data,1}$, $x_{data,2}, x_{data,3}, \ldots$ Cette première étape permet de donner une idée de la dépendance de y_{data} en fonction de chaque paramètre $x_{data,i}$: si une modélisation linéaire, exponentielle, parabolique, etc., semble adaptée.
- Repérer le paramètre $x_{data,k}$ le plus influent.
- À la vue des graphiques fonction du paramètres le plus influent, choisir une modélisation de la grandeur y_{data} en fonction du paramètre $x_{data,k}$ le plus influent. Par exemple $y = K_1 x_{data,k} + K_2$ si une modélisation linéaire suffit. Les coefficients K_1 et K_2 seront identifiés pour chacun des autres paramètres $x_{data,i}$ (avec $i \neq k$). L'erreur relative moyenne obtenue par cette première modélisation représente la meilleure précision que l'on peut espérer du futur modèle que l'on cherche à mettre au point, car il reste encore à modéliser les coefficients K_1 et K_2 en fonction des autres paramètres $x_{data,i}$ (avec $i \neq k$).
- Tracer maintenant les coefficients K_1 et K_2 en fonction des autres paramètres $x_{data,i}$.
- De la même façon, choisir une modélisation de ces coefficients K_1 et K_2 en fonction de ces autres paramètres $x_{data,i}$, en procédant par le plus influent d'abord. Par exemple si K_1 semble parabolique en fonction du paramètre influent $x_{data,j}$, la modélisation suivante pourra être envisagée : $K_1 = K_{1,1} (x_{data,j} K_{1,2})^2 + K_{1,3}$.
- Refaire une optimisation globale de l'expression analytique ainsi choisie $y = \left(K_{1,1} \left(x_{data,j} K_{1,2}\right)^2 + K_{1,3}\right) x_{data,i} + K_2$ sur l'ensemble des coefficients $K_{i,j,...}$.

Ainsi, nous obtenons un modèle identifié avec une expression analytique

$$y = \left(K_{1,1} \left(x_j - K_{1,2}\right)^2 + K_{1,3}\right) x_i + K_2$$

dont les coefficients $K_{i,j,...}$ ont été optimisés par la méthode des moindres carrés.

Afin de quantifier la précision du modèle obtenu, par rapport aux données y_{data} , nous utilisons le critère d'erreur relative moyenne. Il consiste à calculer la moyenne des valeurs absolues des erreurs relatives d'estimation pour chacun des $x_{data,i}$.

$$\begin{split} Er_{\%} &= 100 \, \frac{y_{data} - y}{y_{data}} \\ Er_{moy\%} &= \frac{1}{N_{data}} \sum_{i=1}^{N_{data}} |Er_{\%}(i)| \end{split}$$

Annexe D

Compléments mathématiques

D.1 Rela	tion th ⁻¹ $(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$	316
D.2 Rela	tion th ⁻¹ (x) = $-i \tan^{-1}(ix)$	316
D.3 Réso	olution de $\int rac{dV}{AV^2+BV+C}$	317
D.3.1	Cas du discriminant $\Delta > 0$	317
D.3.2	Cas du discriminant $\Delta < 0$	319
D.3.3	Cas du discriminant $\Delta = 0$	320
D.4 Réso	olution de $\int rac{VdV}{AV^2+BV+C}$	323

Dans ce chapitre en annexe, est données quelques démonstrations mathématiques dont les résultats sont utilisés dans le document principal. Ces résultats peuvent être trouvés partiellement dans des ouvrages tels que [Zwi96, AS74], et je les ai vérifiés à l'aide de MAPLE, puis aussi avec des valeurs numériques à l'aide de MATLAB. Je ne prétends pas avoir la rigueur de mathématiciens, mais simplement de donner dans ce chapitre des éléments de réponse aux curieux qui se demanderaient d'où sortent ces expressions utilisées dans le document principal.

D.1 Relation th⁻¹(x) = $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

Remarque D.1 Cette relation fonctionne également avec les complexes. Pour rester avec des réels il faut que $x \in]-1;1[$

D.2 Relation th⁻¹(x) = $-i \tan^{-1}(i x)$

Nous venons de montrer (Equation D.1, p. 316) que :

$$th^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
Posons
$$z = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$dz = \frac{1}{(1-x)^2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} dx$$

Or, par définition du logarithme népérien, on a :

$$\ln z = \int \frac{dz}{z}$$

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$= \int \frac{dx}{(1-x)^2 \frac{1+x}{1-x}} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{1+(ix)^2}$$

$$= \frac{1}{i} \int \frac{i dx}{1+(ix)^2} = -i \int \frac{i dx}{1+(ix)^2}$$
Or, par définition
$$\tan^{-1}(Z) = \int \frac{dZ}{1+Z^2}$$
Donc
$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -i \tan^{-1}(ix)$$

$$th^{-1}(x) = -i \tan^{-1}(i x)$$
(D.2)

D.3 Résolution de $\int \frac{dV}{AV^2 + BV + C}$

Cette intégrale $\int \frac{dV}{A\,V^2 + B\,V + C}$ est représentative du temps t de roulage au décollage. Le calcul analytique de cette intégrale est présentée ici, dans cette section en annexe, et son résultat sera utilisée dans le document principal (Section 6.4, p. 131). Cette résolution servira également dans la section suivante pour calculer l'intégrale $\int \frac{VdV}{A\,V^2 + B\,V + C}$ qui est représentative de la longueur de piste au roulage.

Nous prendrons soin de travailler avec des fonctions qui restent dans le domaine des réels (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}), ce qui est plus intuitif quand on parle de vitesse avion! Ce qui fait que nous séparerons l'étude de l'intégrale selon le signe du discriminant $\Delta = B^2 - 4 A C$.

D.3.1 Cas du discriminant $\Delta > 0$

Posons $V_{\Gamma=0}^{\ominus}$ et $V_{\Gamma=0}^{\oplus}$ les racines du polynôme du dénominateur :

$$\begin{array}{lcl} V_{\Gamma=0}^{\oplus} & = & \displaystyle \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2\,A} \\ \\ V_{\Gamma=0}^{\ominus} & = & \displaystyle \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2\,A} \end{array}$$

Le polynôme du dénominateur peut se factoriser : $AV^2 + BV + C = A\left(V - V_{\Gamma=0}^{\ominus}\right)\left(V - V_{\Gamma=0}^{\ominus}\right)$.

$$\begin{split} \int \frac{dV}{A\,V^2 + B\,V + C} &= \int \frac{dV}{A\,\left(V - V_{\Gamma=0}^{\ominus}\right)\left(V - V_{\Gamma=0}^{\oplus}\right)} \\ &= \frac{1}{A\left(V_{\Gamma=0}^{\ominus} - V_{\Gamma=0}^{\oplus}\right)} \left(\int \frac{dV}{V - V_{\Gamma=0}^{\ominus}} - \int \frac{dV}{V - V_{\Gamma=0}^{\oplus}}\right) \\ & \text{par une décomposition en fraction rationnelles.} \\ &= \frac{1}{A\left(V_{\Gamma=0}^{\ominus} - V_{\Gamma=0}^{\oplus}\right)} \left(\ln\left|V - V_{\Gamma=0}^{\ominus}\right| - \ln\left|V - V_{\Gamma=0}^{\oplus}\right|\right) \\ &= \frac{1}{A\left(V_{\Gamma=0}^{\ominus} - V_{\Gamma=0}^{\oplus}\right)} \ln\left|\frac{V - V_{\Gamma=0}^{\ominus}}{V - V_{\Gamma=0}^{\oplus}}\right| \\ &= \frac{1}{A\left(\frac{-B - \sqrt{\Delta} + B - \sqrt{\Delta}}{2\,A}\right)} \ln\left|\frac{V - \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2\,A}}{V - \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2\,A}}\right| \\ &= \frac{1}{\left(\frac{-2\sqrt{\Delta}}{2}\right)} \ln\left|\frac{2\,A\,V + B + \sqrt{\Delta}}{2\,A\,V + B - \sqrt{\Delta}}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln\left|\frac{2\,A\,V + B - \sqrt{\Delta}}{2\,A\,V + B + \sqrt{\Delta}}\right| \end{split}$$

C'est exactement l'expression trouvée par [AS74] pour le cas du discriminant $\Delta>0$. Dans [Zwi96] une expression en th⁻¹ est donnée. Retrouvons-là. Nous allons utiliser la relation th⁻¹ $(X)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)$ démontrée précédemment (Equation D.1, p. 316).

$$\frac{1+X}{1-X} = \xi = \frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}}$$

$$1+X = \xi - \xi X$$

$$X = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \frac{\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}} - 1}{\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}} + 1}$$

$$= \frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}-2AV-B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}} + 1$$

$$= \frac{-2\sqrt{\Delta}}{2(2AV+B)} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2AV+B}$$

$$\int \frac{dV}{AV^2+BV+C} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{2AV+B} \right)$$

Cas où $\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}} > 0$, c'est-à-dire $-1 \le \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV+B} \le 1$:

318 18 décembre 2006

 $= -\frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2 A V + B} \right)$

Cas où $\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}} < 0$, c'est-à-dire $-1 \le \frac{2AV+B}{\sqrt{\Delta}} \le 1$:

$$\frac{1+X}{1-X} = \xi = -\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}}$$

$$1+X = \xi - \xi X$$

$$X = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \frac{-\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}} - 1}{-\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}} + 1}$$

$$= \frac{-2AV-B+\sqrt{\Delta}-2AV-B-\sqrt{\Delta}}{-2AV-B+\sqrt{\Delta}+2AV+B+\sqrt{\Delta}}$$

$$= \frac{-2(2AV+B)}{2\sqrt{\Delta}}$$

$$\int \frac{dV}{AV^2+BV+C} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{2AV+B-\sqrt{\Delta}}{2AV+B+\sqrt{\Delta}} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{th}^{-1} \left(-\frac{2AV+B}{\sqrt{\Delta}} \right)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{2AV+B}{\sqrt{\Delta}} \right)$$

C'est effectivement l'expression proposée dans le formulaire [Zwi96] pour un discriminant $\Delta>0$.

D.3.2 Cas du discriminant $\Delta < 0$

Dans le cas du discriminant négatif, pour effectuer l'intégration dans \mathbb{R} , nous allons utiliser l'astuce que le polynôme du dénominateur peut s'écrire sous la forme :

$$A V^{2} + B V + C = AV^{2} + BV + \frac{B^{2}}{4A} + C - \frac{B^{2}}{4A}$$

$$= A \left(V^{2} + 2\frac{B}{2A}V + \frac{B^{2}}{4A^{2}}\right) + C - \frac{B^{2}}{4A}$$

$$= A \left(V + \frac{B}{2A}\right)^{2} + \frac{4AC - B^{2}}{4A}$$

$$= A \left(V + \frac{B}{2A}\right)^{2} + \frac{-\Delta}{4A}$$

$$= A \left(V + \frac{B}{2A}\right)^{2} + \frac{|\Delta|}{4A} \quad \text{puisque } \Delta < 0$$

Ce qui permet de calculer l'intégrale $\int \frac{dV}{A\,V^2 + B\,V + C}$ de la sorte :

$$\int \frac{dV}{A V^2 + B V + C} = \int \frac{dV}{A \left(V + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4A}}$$

$$= \frac{4A}{|\Delta|} \int \frac{dV}{\frac{4A^2}{|\Delta|} \left(V + \frac{B}{2A}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{4A}{|\Delta|} \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2A} \int \frac{\frac{2A}{\sqrt{|\Delta|}} dV}{\left(\frac{2A}{\sqrt{|\Delta|}} \left(V + \frac{B}{2A}\right)\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \tan^{-1} \left(\frac{2AV + B}{\sqrt{|\Delta|}}\right)$$

REMARQUE D.2 Si on accepte, de travailler dans les complexes \mathbb{C} , on peut lier les relations pour $\Delta>0$ et pour $\Delta=i^2|\Delta|<0$ à l'aide de la relation démontrée précédemment (Equation D.2, p. 317) : $\operatorname{th}^{-1}(x)=-i \operatorname{tan}^{-1}(i\,x)$

Remarque D.3 Il est à noter qu'il est possible de trouver un résultat similaire avec l'expression inverse dans l'arctan : $\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2AV+B}$ au lieu de $\frac{2AV+B}{\sqrt{|\Delta|}}$ (c'est ce que propose [GVW69]). Ceci se retrouve grâce à la relation :

$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{Si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{Si } x < 0. \end{cases}$$

Mais cela n'est pas avantageux car il faut alors faire attention au domaine de définition, contrairement à notre expression.

D.3.3 Cas du discriminant $\Delta = 0$

Dans le cas d'un discriminant nul $\Delta=0$, le polynôme $A\,V^2+B\,V+C$ a une racine double $-\frac{B}{2\,A}$ et se factorise.

$$\int \frac{dV}{A V^2 + B V + C} = \int \frac{dV}{A \left(V + \frac{B}{2A}\right)^2}$$

$$= \frac{-1}{A \left(V + \frac{B}{2A}\right)} \operatorname{car} \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2} \operatorname{avec} \begin{cases} f = 1\\ g = V + \frac{B}{2A} \end{cases}$$

$$= \frac{-2}{2 A V + B}$$

C'est également l'expression donnée par [AS74]. Ce cas est en pratique peu applicable pour le roulage d'un avion sur piste, le discriminant strictement nul est en fait purement théorique.

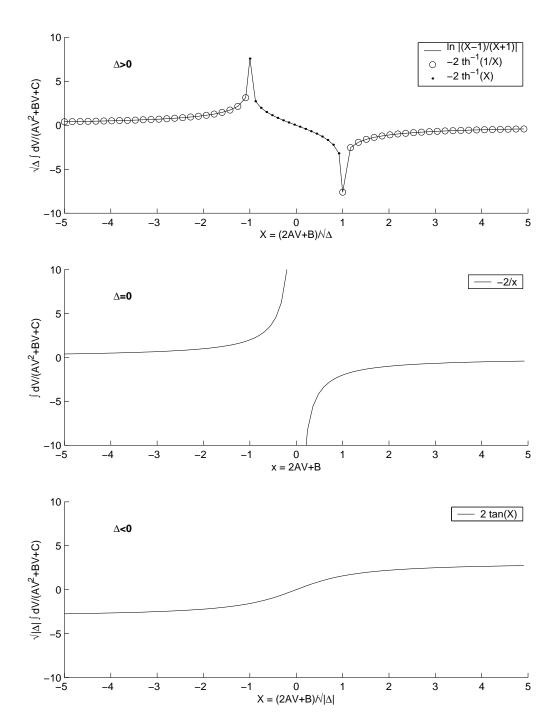


FIG. D.1 – Évolution de l'intégrale $\sqrt{|\Delta|}\int \frac{dV}{AV^2+BV+C}$ en fonction de $X=\frac{2AV+B}{\sqrt{|\Delta|}}$. (Ou bien de $\int \frac{dV}{AV^2+BV+C}$ en fonction de x=2AV+B pour $\Delta=0$). On remarquera que les expressions pour $\Delta>0$ en \ln ou en th^{-1} sont bien équivalentes sur leur domaine de définition.

Résolution de l'intégrale : $\int \frac{dV}{A\,V^2 + B\,V + C}$:

Discriminant : $\Delta = B^2 - 4 A C > 0$

$$\begin{split} \int \frac{dV}{A\,V^2 + B\,V + C} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,\ln\left|\frac{2\,A\,V + B - \sqrt{\Delta}}{2\,A\,V + B + \sqrt{\Delta}}\right| \\ &= \begin{cases} \frac{-2}{\sqrt{\Delta}}\, \operatorname{th}^{-1}\!\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\,A\,V + B}\right) & \text{si } -1 \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,A\,V + B} \leq 1, \\ \frac{-2}{\sqrt{\Delta}}\, \operatorname{th}^{-1}\!\left(\frac{2\,A\,V + B}{\sqrt{\Delta}}\right) & \text{si } -1 \leq \frac{2\,A\,V + B}{\sqrt{\Delta}} \leq 1. \end{cases} \end{split}$$

Discriminant : $\Delta = B^2 - 4 A C < 0$

$$\int \frac{dV}{A V^2 + B V + C} = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \tan^{-1} \left(\frac{2 A V + B}{\sqrt{|\Delta|}} \right)$$

Discriminant : $\Delta = B^2 - 4 A C = 0$

$$\int \frac{dV}{A \, V^2 + B \, V + C} = \frac{-2}{2 \, A \, V + B}$$

D.4 Résolution de $\int \frac{V dV}{A V^2 + B V + C}$

Dans cette section en annexe, le calcul analytique de l'intégrale $\int \frac{V\,dV}{A\,V^2+B\,V+C}$ est effectué. Le résultat sera réutilisé dans le document principal car est représentatif du calcul de la longueur de piste au roulage que ce soit à l'accélération au décollage, ou au freinage lors d'un atterrissage ou d'un décollage interrompu.

$$\begin{split} \int \frac{V \, dV}{A \, V^2 + B \, V + C} &= \frac{1}{2 \, A} \, \int \frac{2 \, AV + B - B}{A \, V^2 + B \, V + C} \, dV \\ &= \frac{1}{2 \, A} \, \int \frac{2 \, AV + B}{A \, V^2 + B \, V + C} \, dV - \frac{1}{2 \, A} \, \int \frac{B \, dV}{A \, V^2 + B \, V + C} \\ &= \frac{1}{2 \, A} \, \ln \left| A \, V^2 + B \, V + C \right| - \frac{B}{2 \, A} \, \int \frac{dV}{A \, V^2 + B \, V + C} \end{split}$$

La solution est alors évidente en reprenant la résolution précédente de l'intégrale $\int \frac{dV}{AV^2 + BV + C}$.

Résolution de l'intégrale :
$$\int \frac{VdV}{\Gamma} = \int \frac{VdV}{4V^2 + BV + C}$$

Discriminant:
$$\Delta = B^2 - 4 A C > 0$$

$$\int \frac{VdV}{\Gamma} = \frac{1}{2A} \ln \left| AV^2 + BV + C \right| - \frac{B}{2A\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{2AV + B - \sqrt{\Delta}}{2AV + B + \sqrt{\Delta}} \right|$$

$$= \frac{1}{2A} \ln \left| AV^2 + BV + C \right| + \begin{cases} \frac{B}{A\sqrt{\Delta}} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2AV + B} \right) & \text{si } \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV + B} \in [-1; 1] \\ \frac{B}{A\sqrt{\Delta}} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{2AV + B}{\sqrt{\Delta}} \right) & \text{si } \frac{2AV + B}{\sqrt{\Delta}} \in [-1; 1] \end{cases}$$

Discriminant :
$$\Delta = B^2 - 4 A C < 0$$

$$\int \frac{VdV}{\Gamma} = \frac{1}{2A} \ln \left| AV^2 + BV + C \right| - \frac{B}{A\sqrt{|\Delta|}} \tan^{-1} \left(\frac{2AV + B}{\sqrt{|\Delta|}} \right)$$

Discriminant :
$$\Delta = B^2 - 4 A C = 0$$

$$\int \frac{VdV}{\Gamma} = \frac{1}{2A} \ln \left| AV^2 + BV + C \right| + \frac{B}{A} \frac{1}{2AV + B}$$

D.5 Résolution : équation différentielle $\frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C$

Dans cette section, nous proposons de résoudre l'équation différentielle dite de Riccati à coefficients A,B,C constants, suivante :

$$\frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C$$

Pour résoudre une équation différentielle, plusieurs méthodes sont en général proposées dans les ouvrages de mathématiques, pour des formes répertoriées, mais cela devient plus délicat lorsque l'on sort des sentiers battus. On procède alors à tâtons pour trouver la forme qui conviendrait. Pour les équations différentielles de Riccati, il est conseillé de trouver une solution particulière, et ensuite d'appliquer une méthode décrite dans les ouvrages de mathématiques pour trouver la solution générale. C'est en procédant de la sorte, en cherchant une solution particulière, que j'ai eu la chance de trouver la fonction suivante, qui, et nous le montrerons, constitue en fait la solution générale de l'équation différentielle que nous cherchons à résoudre (Equation 6.4, p. 120) dans le cas de A, B, C constants.

$$V(t) = \begin{cases} a \operatorname{th}(b \, t + c) + d & \text{si } \Delta > 0 \operatorname{ et } -1 \leq \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \leq 1 \\ \frac{a}{\operatorname{th}(b \, t + c)} + d & \text{si } \Delta > 0 \operatorname{ et } -1 \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i + B} \leq 1 \\ -\frac{1}{At + c} - \frac{B}{2A} & \text{si } \Delta = 0 \operatorname{ et } V_i \neq -\frac{B}{2A} \\ -a \operatorname{ tan}(b \, t + c) + d & \text{si } \Delta < 0. \end{cases}$$

Pour démontrer que cette fonction est la solution, nous procédons de la manière suivante. Nous allons montrer que cette fonction satisfait à la fois l'équation différentielle de Riccati (Equation 6.4, p. 120), mais aussi les conditions initiales $(V(t_i) = V_i)$. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous en déduirons que cette fonction est la solution.

REMARQUE D.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 (pour nous, f c'est l'accélération $AV^2 + BV + C$). Soit (t_i, V_i) élément de U (pour nous, les conditions initiales). Alors il existe une unique fonction V(t), solution maximale de l'équation différentielle V' = f(t, V) sur un intervalle ouvert I contenant t_i , et vérifiant les conditions initiales $V(t_i) = V_i$.

Montrer que la solution proposée satisfait bien l'équation différentielle de Riccati que nous cherchions à résoudre, revient à déterminer les coefficients a,b,d en fonction des coefficients de l'équation de Riccati A,B,C. Appliquer la condition initiale revient à déterminer c.

REMARQUE D.5 Pour l'instant, la restriction du domaine de validité de ces fonctions selon le signe du discriminant Δ peut paraître arbitraire. En fait, c'est au cours de la démonstration qui va suivre, que nous verrons que ces fonctions sont effectivement solution mais sur un domaine donnée, c'est-à-dire pour un discriminant donnée.

Ainsi, ce qui suit est la démonstration pour chaque cas de discriminant, que la fonction proposée est la solution de l'équation différentielle.

 $^{^1{\}rm Si}\ f$ est solution particulière, alors le changement de fonction y=f+1/z ramène à une équation linéaire, dite de Bernoulli, déterminant z.

Cas du discriminant $\Delta < 0$:

L'expression proposée de la solution V est la suivante :

$$V = -a \tan(bt + c) + d$$

Vérifions que cette fonction satisfait bien l'équation différentielle de Riccati :

$$\frac{dV}{dt} = -ab \left(1 + \tan^2(bt + c)\right) = -ab \left(1 + \left(\frac{V - d}{a}\right)^2\right)$$

$$= -ab - \frac{b}{a} \left(V^2 + d^2 - 2dV\right)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right) V^2 + \left(\frac{2bd}{a}\right) V - \left(ab + \frac{bd^2}{a}\right)$$
Or, $\frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C$ par définition
$$\begin{cases} -\frac{b}{a} &= A\\ \frac{2bd}{a} &= B\\ -ab - \frac{bd^2}{a} &= C \end{cases}$$

Des deux premières équations du système précédent, l'expression de d s'établit :

$$B = \frac{2bd}{a} = -2Ad$$
 donc $d = -\frac{B}{2A}$

À l'aide de la dernière équation du système, les expressions de a et b sont données :

$$C = -a b - \frac{b d^2}{a} = a^2 A + \frac{B^2}{4 A}$$

$$a^2 = \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4 A^2} = \frac{4AC - B^2}{4 A^2} \quad \text{(Ce qui impose } \Delta = B^2 - 4 A C < 0\text{)}$$

$$a = \sqrt{\frac{-(B^2 - 4 A C)}{(2 A)^2}} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2 A} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2 A}$$

$$b = -a A = -\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

REMARQUE D.6 En prenant la racine de a, on aurait pu prendre le signe opposé ce qui aurait également imposé un signe opposé à b, qui n'aurait donc pas changé la solution de V (puisque $\tan(-x) = -\tan(x)$) si ce n'est à la valeur de la constante c déterminée par les conditions initiales.

Cette fonction vérifie donc bien l'équation différentielle pour un discriminant $\Delta < 0$. Appliquons la condition initiale $V(t_i) = V_i$: ce qui revient à imposer la constante c.

$$c = -\tan^{-1}\left(\frac{V_i - d}{a}\right) - bt_i$$

La fonction $V = -a \tan(bt + c) + d$ satisfait donc l'équation différentielle et la condition initiale. En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit qu'elle est bien la solution de l'équation de Riccati pour le cas $\Delta < 0$.

Remarque D.7 Cette fonction diverge vers $\pm \infty$ pour des valeurs de $(bt+c) \longmapsto \frac{\pi}{2}$ à $k\pi$ près (selon la condition initiale), ce qui semble restreindre le domaine de définition. En fait, l'avion aura largement freiné ou décollé bien avant ce temps puisque la vitesse augmentera ou diminuera suffisamment pour s'arrêter ou atteindre V_R .

Cas du discriminant $\Delta = 0$:

Contrairement au autres cas de discriminant, la démonstration de la solution du cas du discriminant nul, peut se déduire directement par intégration de l'équation différentielle de Riccati.

Si le discriminant est nul, alors le polynôme a une racine double $-\frac{B}{2A}$ et peut par conséquent se factoriser de la sorte :

$$\frac{dV}{dt} = AV^2 + BV + C$$

$$= A\left(V + \frac{B}{2A}\right)^2$$
Posons $u = V + \frac{B}{2A}$

$$du = dV$$

$$\frac{du}{dt} = Au^2$$

$$\frac{du}{u^2} = A dt \quad \text{si } u \neq 0 \text{ c'est-à-dire } V \neq -\frac{B}{2A}$$

$$-\frac{1}{u} = At + c$$

$$u = -\frac{1}{At + c}$$

$$V = -\frac{1}{At+c} - \frac{B}{2A}$$

Appliquons la condition initiale qui veut qu'au temps initiale t_i , la vitesse de l'avion vaille $V(t_i) = V_i$.

$$V_{i} = -\frac{1}{At_{i} + c} - \frac{B}{2A}$$

$$A t_{i} + c = -\frac{1}{V_{i} + \frac{B}{2A}} = -\frac{2A}{2AV_{i} + B}$$

$$c = -A\left(\frac{2}{2AV_i + B} + t_i\right)$$

REMARQUE D.8 Le cas de $V=-\frac{B}{2A}$ n'est pas intéressant car il impose une accélération $\Gamma=\frac{dV}{dt}=0$ et par conséquent l'avion roule à vitesse constante et ne freine pas, ni n'accélère pas.

Cas du discriminant $\Delta > 0$ et vitesse initiale $-1 \le \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \le 1$: Prenons la fonction suivante et montrons qu'elle est solution de l'équation différentielle

de Riccati:

$$V = a \operatorname{th} (bt + c) + d$$

$$\frac{dV}{dt} = ab \left(1 - \operatorname{th}^{2}(bt + c)\right)$$

$$= ab \left(1 - \left(\frac{V - d}{a}\right)^{2}\right)$$

$$= ab - \frac{b}{a}\left(V^{2} + d^{2} - 2dV\right)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)V^{2} + \left(\frac{2bd}{a}\right)V + \left(ab - \frac{bd^{2}}{a}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = AV^{2} + BV + C$$

 $\frac{dV}{dt} = A V^2 + B V + C$ Or par définition :

Donc on obtient: $\begin{cases} -\frac{b}{a} &= A \\ \frac{2bd}{a} &= B \\ ab - \frac{bd^2}{a} &= C \end{cases}$

Des deux premières équations du système précédent, l'expression de d s'établit :

$$B = \frac{2 bd}{a} = -2 A d \quad \text{donc} \quad d = -\frac{B}{2 A}$$

À l'aide de la dernière équation du système, les expressions de a et b sont données :

$$C = a b - \frac{b d^2}{a} = -a^2 A + \frac{B^2}{4 A}$$

$$a^2 = \frac{B^2}{4 A^2} - \frac{C}{A} = \frac{B^2 - 4AC}{4 A^2} \quad \text{(Ce qui impose } \Delta = B^2 - 4AC > 0\text{)}$$

$$a = \sqrt{\frac{(B^2 - 4AC)}{(2A)^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2A}$$

$$b = -a A = -\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

En prenant la racine de a, on aurait pu prendre le signe opposé ce qui aurait également imposé un signe opposé à b, qui n'aurait donc pas changé la solution de V (puisque th(-x) = -th(x)) si ce n'est à la valeur de la constante c déterminée par les conditions initiales. La racine de a impose le signe du discriminant $\Delta = B^2 - 4 A C > 0$.

Appliquons la condition initiale $V(t_i) = V_i$: ce qui revient à imposer la constante c.

$$c = th^{-1} \left(\frac{V_i - d}{a} \right) - bt_i$$

La fonction V=a th (bt+c)+d satisfait donc l'équation différentielle et la condition initiale (si celle-ci est comprise entre $-1 \le \frac{V_i-d}{a} \le 1$ c'est-à-dire $-1 \le \frac{2AV_i+B}{\sqrt{\Delta}} \le 1$. En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit qu'elle est bien la solution de l'équation de Riccati pour le cas $\Delta>0$ et $-1 \le \frac{2AV_i+B}{\sqrt{\Delta}} \le 1$.

Cas du discriminant $\Delta>0$ et vitesse initiale $-1\leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i+B}\leq 1$: Montrons que la fonction suivante est solution de l'équation différentielle de Riccati:

$$V = \frac{a}{\operatorname{th}(bt+c)} + d$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-a b \left(1 - \operatorname{th}^2(bt + c)\right)}{\operatorname{th}^2(bt + c)}$$

$$= a b \left(1 - \left(\frac{V - d}{a}\right)^2\right)$$

$$= a b - \frac{b}{a} \left(V^2 + d^2 - 2dV\right)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right) V^2 + \left(\frac{2 b d}{a}\right) V + \left(a b - \frac{b d^2}{a}\right)$$
Or par définition:
$$\frac{dV}{dt} = A V^2 + B V + C$$
Donc on obtient:
$$\begin{cases} -\frac{b}{a} &= A \\ \frac{2 b d}{a} &= B \\ a b - \frac{b d^2}{a} &= C \end{cases}$$

Ce qui revient à résoudre le même système que précédemment.

$$d = -\frac{B}{2 A}$$

$$a = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2 A}$$

$$b = -\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

De même, on aurait pu prendre le signe opposé pour a ce qui aurait également imposé un signe opposé à b, qui n'aurait donc pas changé la solution de V (puisque $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th}(x)$) si ce n'est à la valeur de la constante c déterminée par les conditions initiales. La racine de a impose le signe du discriminant $\Delta = B^2 - 4$ A C > 0.

Appliquons la condition initiale $V(t_i) = V_i$: ce qui revient à imposer la constante c.

$$c = \operatorname{th}^{-1}\left(\frac{a}{V_i - d}\right) - bt_i$$

La fonction $V=\frac{a}{\operatorname{th}(bt+c)}+d$ satisfait donc l'équation différentielle et la condition initiale (si celle-ci est comprise entre $-1 \leq \frac{a}{V_i-d} \leq 1$ c'est-à-dire $-1 \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i+B} \leq 1$. En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit qu'elle est bien la solution de l'équation de Riccati pour le cas $\Delta>0$ et $-1 \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i+B} \leq 1$.

Conclusion : Solution de l'équation différentielle de Riccati . L'équation différentielle de Riccati $\frac{dV}{dt} = A\,V^2 + B\,V + C$ à coefficients A,B,C constants, satisfaisant à la condition initiale $V(t_i) = V_i$, admet comme solution V(t):

Vitesse d'un avion au roulage partant avec une vitesse initiale $V(t_i) = V_i$:

$$V(t) = \begin{cases} a \operatorname{th} (b t + c) + d & \operatorname{si} \Delta > 0 \operatorname{et} -1 \leq \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \leq 1 \\ \frac{a}{\operatorname{th}(b t + c)} + d & \operatorname{si} \Delta > 0 \operatorname{et} -1 \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2AV_i + B} \leq 1 \\ -\frac{1}{At + c} - \frac{B}{2A} & \operatorname{si} \Delta = 0 \operatorname{et} V_i \neq -\frac{B}{2A} \\ -\frac{B}{2A} & \operatorname{si} \Delta = 0 \operatorname{et} V_i = -\frac{B}{2A} \\ -a \operatorname{tan} (b t + c) + d & \operatorname{si} \Delta < 0. \end{cases}$$

Avec

$$a = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2A} \qquad \Delta = B^2 - 4AC$$

$$b = -\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

$$d = -\frac{B}{2A}$$

$$c = \begin{cases} \tanh^{-1}\left(\frac{V_i - d}{a}\right) - b t_i & \text{si } \Delta > 0 \text{ et } -1 \le \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \le 1 \\ \tanh^{-1}\left(\frac{a}{V_i - d}\right) - b t_i & \text{si } \Delta > 0 \text{ et } -1 \le \frac{2AV_i + B}{\sqrt{\Delta}} \le 1 \\ -A\left(\frac{2}{2AV_i + B} + t_i\right) & \text{si } \Delta = 0 \\ -\tan^{-1}\left(\frac{V_i - d}{a}\right) - b t_i & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

Annexe E

Données de longueurs et d'altitudes de pistes d'aéroports

À titre indicatif, voici les caractéristiques des principaux aéroports du monde. Ces données proviennent d'un extrait du livre "Civil Jet Aircraft Design" de L. R. Jenkinson, P. Simpkin, et D. Rhodes (Éditions Butterworth-Heinemann. July 1999. ISBN: 034074152X), qui est mis en ligne à l'adresse suivante:

http://www.bh.com/companions/034074152X/appendices/data-c/airports.xls.

La donnée de longueur de la piste de l'aéroport du tableau ci-dessous, permettra, en comparaison avec la longueur de piste réglementaire $L_{p_{\rm FAR}}$ d'un avion (Section 1.3, p. 24), de déterminer si l'avion pourra décoller ou non sur tel ou tel aéroport. La masse volumique de l'air ρ au niveau de la piste (en condition ISA), est également indiquée, et a été calculée à partir de la donnée de l'altitude de la piste.

Country	City Name	Airport Name	Length	Elevation	ρ
			(m)	(m)	(kg/m^3)
Afghanistan	Kabul	Kabul	3500	1789	1.027
Alaska	Anchorage Intl	Anchorage Intl	3321	44	1.22
Alaska	Anchorage Elmendorf	Elmendorf	3048	65	1.217
Alaska	Cold Bay	Cold Bay	3174	30	1.221
Alaska	Fairbanks	Fairbanks Intl	3139	132	1.21
Alaska	Sheyma	Sheyma	3046	30	1.221
Albania	Tirana	Rinas	2750	36	1.221
Algeria	Adrar	Touat	3000	279	1.192
Algeria	Algiers	Houari Boumedienne	3505	25	1.222
Algeria	Annaba	El Mellah	3000	5	1.224
Algeria	Constantine	Ain-El-Bey	2400	702	1.144
Algeria	El Golea	El Golea	3000	398	1.179
Algeria	Ghardaia	Ghardaia	3100	461	1.172
Algeria	Hassi Messaoud	Oued Irara	3000	141	1.208
Algeria	In Salah	In Salah	2400	269	1.194
Algeria	Oran	Es Senia	3000	90	1.214
Algeria	Tamanrasset	Tamanrasset	3600	1377	1.071
Algeria	Zarazaitine	In Amenas	3000	563	1.16
Angola	Luanda	Luanda	3700	74	1.216
Argentina	Buenos Aires	Ezeiza	3300	20	1.223
Argentina	Comodoro Rivadavia	Comodoro Rivadavia	2750	58	1.218
Argentina	Cordoba	Cordoba	3200	489	1.168
Argentina	Mar De Plata	Mar De Plata	2200	20	1.223
Ascension Is.	Ascension	Wideawake	3048	83	1.215
Australia	Adelaide	Adelaide Intl.	2528	6	1.224
Australia	Alice Springs	Alice Springs	2438	545	1.162
Australia	Avalon	Avalon	3048	11	1.224
Australia	Brisbane	Brisbane	3500	4	1.225
Australia	Cairns	Cairns	3197	3	1.225
Australia	Canberra	Canberra	2682	575	1.159

Country	City Name	Airport Name	Length	Elevation	$\frac{\rho}{(kg/m^3)}$
			(m)	(m)	
Australia	Coolangatta	Coolangatta	2042	6	1.224
Australia	Darwin	Darwin Intl.	3324	31	1.221 1.224
Australia Australia	Karratha Katherine	Dampier Tindal	1850 2713	9 131	1.224
Australia	Meekatharra	Meekatharra	2181	522	1.165
Australia	Melbourne	Melbourne Intl.	3658	132	1.21
Australia	Mount Isa	Mount Isa	2560	342	1.185
Australia	Norfolk Island	Norfolk Island	1951	113	1.212
Australia	Pearce	Pearce	2438	45	1.22
Australia	Perth	Perth Intl.	3444	20	1.223
Australia	Port Hedland	Port Hedland	2500	10	1.224
Australia	Rockhampton	Rockhampton	1981	10	1.224
Australia Australia	Sydney Townsville	Kingford Smith Townsville	3962 2408	6 5	1.224 1.224
Austria	Innsbruck	Innsbruck	2000	581	1.158
Austria	Klagenfurt	Klagenfurt	2720	448	1.173
Austria	Linz	Linz	2810	298	1.19
Austria	Salzburg	Salzburg	2550	430	1.175
Austria	Vienna	Schwechat	3600	183	1.204
Azerbaijan	Baku	Bina	2700	0	1.225
Azores	Lajes	Lajes	3312	55	1.219
Azores	Ponta Delgardo	Ponta Delgardo	2352	79	1.216
Azores	Santa Maria	Santa Maria	3048	94	1.214
Bahamas	Freeport	Freeport	3353	2	1.225
Bahamas	Nassau	Nassau Intl	3353	2	1.225
Bahrain	Bahrain	Bahrain Intl	3963	2	1.225
Bangladesh	Chittagong	Chittagong	3048	4 7	1.225
Bangladesh	Dhaka Tezgaon	Tezgaon Zin Intl	2743	7	1.224 1.224
Bangladesh Barbados	Dhaka Intl Barbados	Zia Intl. Grantly Adams Intl	3200 3353	8 52	1.224
Belarus	Minsk	Minsk-2	3640	204	1.219
Belgium	Antwerp	Deurne	1475	12	1.224
Belgium	Brussels	Brussels National	3638	56	1.218
Belgium	Charleroi	Brussels South	2550	187	1.203
Belgium	Liege	Bierset	2694	201	1.201
Belgium	Ostend	Ostend	3200	4	1.225
Belize	Belize	Phillip S.W. Goldson Intl	2164	5	1.224
Benin	Cotonou	Cadjehoun	2400	5	1.224
Bermuda	Bermuda	Bermuda	2944	3	1.225
Botswana	Francistown	Francistown	2200	1001	1.111
Botswana	Gaborone Notwane	Notwane	1524	981	1.113
Botswana	Gaborone Intl	Seretse Khama Intl.	3000	1006	1.111
Botswana Botswana	Ghanzi	Ghanzi	1420	1137	1.096
Brazil	Selebi-Phikwe Belo Horizonte	Selebi-Phikwe	1780	892	1.123
Brazil	Brasilia	Trancredo Neves Brasilia	2537 3199	789 1059	1.105
Brazil	Campinas	Viracopos	3232	661	1.149
Brazil	Fernando De Norohna	Fernando De Norohna	1845	55	1.219
Brazil	Florianpolis	Hercilio Luz	2299	5	1.224
Brazil	Maceio	Palmares	2200	118	1.211
Brazil	Natal	Augusto Severo	2270	51	1.219
Brazil	Porto Alegre	Salgado Filho	2279	3	1.225
Brazil	Recife	Guararapes	3001	10	1.224
Brazil	Rio De Janeiro	Galeao Intl	4000	9	1.224
Brazil Brazil	Salvador	Dois De Julho	3005	19	1.223
Brazil Brazil	Sao Jose Dos Campos Sao Paulo	Sao Jose Dos Campos Guarulhas	2676 3700	646 750	1.151 1.139
Bulgaria	Burgas	Burgas	3200	41	1.139
Bulgaria	Sofia	Sofia	2800	531	1.164
Bulgaria	Varna	Varna	2500	70	1.217
Burkina	Bobo-Dioulasso	Bobo-Dioulasso	3300	460	1.172
Burkina	Ouagadougou	Ouagadougou	3000	316	1.188
Burundi	Bujumbura	Bujumbura	3600	787	1.135
Cambodia	Phnom-Penh	Pochentong	3000	12	1.224
Cameroon	Douala	Douala	2850	10	1.224
Cameroon	Garoua	Garoua	3400	242	1.197
Cameroon	Yaounde	Nsimalen	3400	694	1.145
Canada	Abbotsford	Abbotsford	2438	58	1.218
Canada	Bagotville	Bagotville	3048	58	1.218
Canada Canada	Calgary Churchill	Calgary Intl Churchill	3863 2804	1084 29	1.102 1.222
Canada	Edmonton	Edmonton Intl	3353	723	1.142
Canada	Fredericton	Fredericton	1829	20	1.223
Canada	Gander	Gander	3200	151	1.207
Canada	Goose	Goose	3368	49	1.219
Canada	Halifax	Halifax Intl	2682	145	1.208
Canada	Halifax	Shearwater	2499	51	1.219
Canada	Hamilton	Hamilton	2438	238	1.197
Canada	Iqualuit	Iqualuit	2743	34	1.221
Canada	Kuujjuag	Kuujjuag	1829	37	1.221
Canada	Moncton	Moncton	2438	71	1.217
Canada Canada	Mont Joli Montreal Dorval	Mont Joli Dorval	1829	52 36	1.219 1.221
Canada	Montreal Dorval Montreal Mirabel	Mirabel	3353 3658	82	1.221
Canada	Junicai Miliauci	111110001	3038	62	1.210

Country	City Name	Airport Name	Length	Elevation	ρ
			(m)	(m)	(kg/m^3)
Canada	North Bay	North Bay	3048	371	1.182
Canada	Ottawa	Ottawa	3048	114	1.212
Canada	Quebec	Quebec	2743	74	1.216
Canada Canada	Regina Sasskatoon	Regina Sasskatoon	2408 2530	577 504	1.158 1.167
Canada	Sept Iles	Sept Iles	2003	55	1.219
Canada	St. Johns	St. Johns	2591	140	1.209
Canada	Stephenville	Stephenville	3048	26	1.222
Canada	Sydney	Sydney	2155	62	1.218
Canada	Thompson	Thompson	1768	222	1.199
Canada	Toronto	Toronto	3368	173	1.205
Canada	Uranium City Val D'Or	Uranium City	1524	318	1.188 1.186
Canada Canada	Vancouver	Val D'Or Vancouver	3048 3353	337 3	1.225
Canada	Whitehouse	Whitehouse	2195	703	1.144
Canada	Windsor	Windsor	2408	190	1.203
Canada	Winnipeg	Winnipeg	3353	239	1.197
Canada	Yarmouth	Yarmouth	1829	43	1.22
Canada	Yellowknife	Yellowknife	2286	206	1.201
Canary Is.	Fuerteventura	Fuerteventura	2400	23	1.222
Canary Is.	Gran Canaria	Las Palmas	3100	23 29	1.222 1.222
Canary Is. Canary Is.	La Palma Lanzarote	La Palma Lanzarote	2200 2400	14	1.222
Canary Is.	Tenerife Norte	Norte	3400	632	1.152
Canary Is.	Tenerife Reina Sofia	Reina Sofia	3200	64	1.217
Cape Verde Republic	Sal	Amilcar Cabrai	3270	54	1.219
Cayman Islands	Grand Cayman	Owen Roberts	2134	2	1.225
Central African Republic	Bamgui	M'Poko	2600	367	1.182
Chile	Concepcion	Carriel Sur	2300	1597	1.047
Chile	Punta Arenas	Pres. Ibanez	2790	43	1.22
Chile	Santiago	A M Benitez	3200	474	1.17
China China	Beijing	Capital	3800	35	1.221
China	Chengdu Guangzhou/Canton	Shuangliu Baiyun	2800 3380	495 11	1.168 1.224
China	Kunming	Wujiaba	3400	1895	1.017
China	Lanzhou	Zhongchuan	3400	1948	1.011
China	Shanghai	Hongqiac	3200	3	1.225
China	Shenzhen	Huangtian	3400	4	1.225
China	Taiyuan	Wusu	2500	782	1.135
China	Tianjin	Zhangguizhuang	3200	3	1.225
China China	Urumqi Xi'An	Diwopu Xianyang	3200 3000	649	1.15 1.169
Colombia	Barranquilla	Cortissoz	3000	479 29	1.109
Colombia	Bogota	Eldorado	3800	2547	0.952
Colombia	Cali	Alfonso Bonilla Aragon	3000	964	1.115
Colombia	Cartegena	R. Nunez	2600	2	1.225
Colombia	San Andres	San Andres	2380	6	1.224
Comores & Mayotte Islands	Dzaoudzi	Pamanzi	1400	7	1.224
Comores & Mayotte Islands	Moroni Hahaia	Hahaia	2900	27	1.222
Comores & Mayotte Islands	Moroni Iconi	Iconi	1355	9	1.224
Congo Congo	Brazzaville Pointe Noire	Maya Maya Pointe Noire	3300 2000	319 17	1.188 1.223
Croatia	Dubrovnik	Dubrovnik	3300	161	1.206
Croatia	Rijeka	Krk	2500	85	1.215
Croatia	Split	Split	2550	24	1.222
Croatia	Zadar	Zadar	2500	88	1.215
Croatia	Zagreb	Zagreb	3250	107	1.212
Cuba	Camaguey	Ignacio Agramonte	3000	124	1.21
Cuba	Cayo Largo Del Sur	Cayo Largo Del Sur	3000	2	1.225
Cuba	Havana	Jose Marti Intl	4000	64	1.217
Cuba Cyprus	Varadero Larnaca	Varadero Larnaca	3500 2700	65	1.217
Cyprus	Paphos	Paphos Intl	2700	12	1.225
Czech Republic	Prague	Ruzyne	3715	380	1.181
Denmark	Aalborg	Aalborg	2650	3	1.225
Denmark	Billund	Billund	3100	75	1.216
Denmark	Bornholm	Ronne	2000	16	1.223
Denmark	Copenhagen Kastrup	Kastrup	3600	5	1.224
Denmark	Copenhagen Roskilde	Roskilde	1500	44	1.22
Denmark Denmark	Esbjerg	Esbjerg	2600 1645	30 17	1.221 1.223
Denmark Denmark	Odense Tirstrup	Odense Tirstrup	2708	25	1.223
Djibouti	Djibouti	Ambouli	3140	15	1.223
Dominican Republic	Puerto Plata	Puerto Plata	3079	5	1.224
Dominican Republic	Punta Cana	Punta Cana	2737	12	1.224
Dominican Republic	Santo Domingo	De Las Americas	3353	17	1.223
Ecuador	Guayaquil	Simon Bolivar	2440	5	1.224
Egypt	Alexandria	Alexandria	2200	-1	1.225
Egypt	Aswan	Aswan	3400	200	1.202
Egypt	Cairo	Cairo Intl.	3300	116	1.211
Egypt	Hurghada	Hurghada	4000	16	1.223
Egypt	Luxor Port Said	Luxor Port Said	3000	88 2	1.215
Egypt Egypt	Ras El Nakab	Port Said Ras El Nakab	1500 3000	753	1.225 1.139
-0JP"			3000	100	1.100

Country	City Name	Airport Name	Length	Elevation	ρ
			(m)	(m)	(kg/m^3)
Egypt	Ras Nasrani	Sharm El-Sheikh	3080	50	1.219
El Salvador	San Salvador	El Salvador Intl	3200	31	1.221
Ethiopia	Addis Ababa Asmara	Bole Intl. Asmara	3700	2324 2322	0.973
Ethiopia Ethiopia	Asmara Dire Dawa	Asmara Aba Tenna Dejaznatch Yilma	3000 2700	1166	0.974 1.093
Finland	Helsinki Malmi	Malmi	1399	17	1.223
Finland	Helsinki Vantaa	Vantaa	3440	51	1.219
Finland	Ivalo	Ivalo	2500	145	1.208
Finland	Mariehamn	Mariehamn	1900	5	1.224
Finland Finland	Oulu Pori	Oulu Pori	2500	14 13	1.223 1.223
Finland	Rovaniemi	Rovaniemi	2000 3000	197	1.202
Finland	Tampere	Pirkkala	2700	119	1.211
Finland	Turku	Turku	2500	49	1.219
France	Abbeville	Abbeville	1600	67	1.217
France	Aglen	La Garenne	2165	62	1.218
France	Ajaccio	Dell'Oro	2418	5	1.224
France	Angers	Avrille	1235	57	1.218
France	Basle Bastia	Mulhouse Poretta	3900	269	1.194 1.224
France France	Bergerac	Roumaniere	2520 2055	8 51	1.219
France	Beuvais	Tille	2430	109	1.212
France	Beziers	Vias	1820	17	1.223
France	Biarritz/Bayone	Anglet	2250	74	1.216
France	Bordeaux	Merignac	3100	49	1.219
France	Brest	Guipavas	3100	99	1.213
France	Bretigny-Sur-Orge	Bretigny-Sur-Orge	3000	82	1.215
France France	Caen Cahors	Carpiquet	1600 1500	78 278	1.216 1.193
France France	Calais-Dunkerque	Lalbenque Calais-Dunkerque	1535	3	1.193
France	Calvi	St. Catherine	2310	64	1.217
France	Cambrai	Epinoy	2530	78	1.216
France	Cannes	Mandelieu	1550	4	1.225
France	Carcassonne	Salvaza	1950	132	1.21
France	Chambery	Aix Les Bains	2020	240	1.197
France	Chateauroux	Deols	2550	161	1.206
France France	Cherbourg	Maupertus	2440	139	1.209
France France	Clermount Ferrand Colmar	Aulnat Houssen	3015 1610	332 192	1.186 1.203
France	Deauville	St. Gatien	2550	146	1.208
France	Dieppe	St. Aubin	820	105	1.213
France	Dijon	Longvic	2400	222	1.199
France	Dinard	Pleurtuit-St. Malo	2200	66	1.217
France	Grenoble	St. Geoirs	3050	397	1.179
France	Hyeres	Le Palyvestre	2120	4	1.225
France	La Rochelle	Laleu	2140	22	1.222
France France	Lannion Le Havre	Lannion Octeville	1702 2300	89 95	1.215 1.214
France	Le Mans	Arnage	1410	59	1.214
France	Le Touquet	Paris Plage	2250	11	1.224
France	Lille	Lesquin	2825	48	1.219
France	Limoges	Bellegarde	2500	396	1.179
France	Lyon	Bron	1820	201	1.201
France	Marseille	Provence	3500	21	1.223
France	Metz	Nancy Lorraine	2500	265	1.194
France	Montpellier	Frejorgues	2600	5	1.224
France France	Morlaix Nancy	Ploujean Essey	1285 1400	86 230	1.215 1.198
France	Nantes Atlantique	Nantes Atlantique	2900	27	1.222
France	Paris Charles De Gaulle	Charles-De-Gaulle	3615	118	1.211
France	Paris Le Bourget	Le Bourget	3000	66	1.217
France	Paris Orly	Orly	3650	89	1.215
France	Pau Pyrenees	Pau Pyrenees	2500	188	1.203
France	Perigueux	Bassillac	1750	100	1.213
France	Perpignan	Rivesaltes	2500	44	1.22 1.213
France France	Pontoise Quimper	Cormeilles En Vexin Pluguffan	1690 2150	99 92	1.213
France France	Reims	Champagne	2482	92 95	1.214
France	Rennes	St. Jacques	2100	37	1.221
France	Rodez	Marcillac	2040	581	1.158
France	Rouen	Vallee De Seine	1700	156	1.207
France	St. Brieuc	Armor	2200	138	1.209
France	St. Ettienne	Boutheon	2300	404	1.178
France	St. Nazaire	Montoir	2400	3	1.225
France	St. Yan	St. Yan	2030	242	1.197
France	Strasbourg	Entzheim Ossun-Lourdes	2400	153 379	1.207 1.181
France France	Tarbes Toulouse Blagnac	Ossun-Lourdes Blagnac	3000 3500	152	1.181
France	Toulouse Francazal	Francazal	1800	163	1.206
France	Tours	St. Symphorien	2400	108	1.212
France	Toussus Le Noble	Toussus Le Noble	1100	164	1.206
France	Troyes	Barberey	1568	120	1.211
France	Valence	Chabeuil	2100	162	1.206
Gabon	Franceville	Mvenge	3080	441	1.174

Country	City Name	Airport Name	Length (m)	Elevation (m)	$\frac{\rho}{(kg/m^3)}$
Gabon	Libreville	Libreville	3000	12	1.224
Gabon	Port Gentil	Port Gentil	1900	4	1.225
Gambia	Banjul	Banjul	3600	29	1.222
Georgia	Tbilisi	Novoalekseevka	2500	479	1.169
Germany	Berlin Gatow	Gatow	1833	49	1.219
Germany Germany	Berlin Schoenefield Berlin Tegel	Schoenefield Tegel	3000 3023	47 37	1.219 1.221
Germany	Berlin Teger Berlin Templehof	Templehof	2116	50	1.219
Germany	Braunsweig	Braunsweig	1620	89	1.215
Germany	Bremen	Bremen	2034	4	1.225
Germany	Cologne-Bonn	Cologne-Bonn	3800	91	1.214
Germany	Dortmund Dresden	Wickede Dresden	1050	127	1.21 1.198
Germany Germany	Dresden Dusseldorf	Dresden Dusseldorf	2500 3000	230 45	1.198
Germany	Erfurt	Erfurt	2000	315	1.188
Germany	Frankfurt	Main	4000	111	1.212
Germany	Friedrichshafen	Friedrichshafen	2356	416	1.177
Germany	Hamburg Finkenwerder	Finkenwerder	2321	5	1.224
Germany	Hamburg	Hamburg	3666	16	1.223
Germany	Hannover	Hannover	3800	56	1.218 1.182
Germany Germany	Ingolstadt Kassel-Calden	Ingolstadt Kassel-Calden	2940 1500	366 276	1.182
Germany	Kiel	Holtenau	1400	31	1.221
Germany	Leipzig	Halle	2500	142	1.208
Germany	Lubeck	Blankensee	1800	16	1.223
Germany	Munich	Munich	4000	453	1.172
Germany	Munster	Munster/Osnabruck	2170	48	1.219
Germany	Nordholz	Nordholz	2439	23	1.222
Germany	Nurnberg	Nurnberg Oberpfaffenhofen	2700 2286	319 593	1.188 1.157
Germany Germany	Oberpfaffenhofen Paderborn	Paderborn	2180	213	1.157
Germany	Saarbrucken	Ensheim	2000	322	1.187
Germany	Stuttgart	Stuttgart	2550	396	1.179
Germany	Sylt	Westerland	2124	16	1.223
Ghana	Accra	Kotoka Intl.	2987	62	1.218
Ghana	Kumsai	Kumsai	1981	287	1.192
Ghana	Sunyani	Sunyani	1402	304	1.19
Ghana Ghana	Takoradi Tamale	Takoradi Tamale	1751 2438	6 169	1.224 1.205
Gibralter	Gibraltar	Gibraltar	1829	5	1.224
Greece	Alexandroupolis	Dimokritos	2600	7	1.224
Greece	Andravida	Andravida	3139	17	1.223
Greece	Araxos	Araxos	2990	15	1.223
Greece	Athens	Central	3500	21	1.223
Greece	Elefsis	Elefsis	2739	44	1.22
Greece	Heraklion	Nikos Kazantzakis	2735	35	1.221
Greece Greece	Ioannina Karpathos	Ioannina Karpathos	2400 2100	476 19	1.17 1.223
Greece	Kavala	Megas Alexandros	3000	5	1.224
Greece	Kefallinia	Kefallinia	2430	18	1.223
Greece	Kerkyra	Ioannis Kapodistrias	2375	2	1.225
Greece	Khios	Khios	1500	5	1.224
Greece	Limnos	Limnos	3000	5	1.224
Greece	Mikonos	Mikonos	1410	123	1.211
Greece	Mitilini Rhodes Diagona	Mitilini	2414	17	1.223
Greece Greece	Rhodes Diagoras Rhodes Maritsa	Diagoras Maritsa	3260 2400	4 62	1.225 1.218
Greece	Salonika	Makedonia	2400	02	
			2440	7	
Greece	Samos	Samos	2440 2100	7 6	1.224 1.224
Greece Greece	Samos Santorini	Samos Santorini		6 38	1.224 1.224 1.221
Greece Greece Greece	Samos Santorini Skiathos	Samos Santorini Skiathos	2100 2120 1570	6 38 15	1.224 1.224 1.221 1.223
Greece Greece Greece Greece	Samos Santorini Skiathos Zakinthos	Samos Santorini Skiathos Zakinthos	2100 2120 1570 2220	6 38 15 3	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225
Greece Greece Greece Greece Greenland	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq	2100 2120 1570 2220 1830	6 38 15 3	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225
Greece Greece Greece Greece Greenland Greenland	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq	2100 2120 1570 2220 1830 2815	6 38 15 3 34 50	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225 1.221 1.219
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987	6 38 15 3 34 50	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225 1.225 1.221 1.219
Greece Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guine-Bissau	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200	6 38 15 3 34 50 1509	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225 1.221 1.219 1.057
Greece Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guine-Bissau Guinee	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300	6 38 15 3 34 50 1509 39	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guine-Bissau Guinee Guyana	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286	6 38 15 3 34 50 1509 22 29	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222
Greece Greece Greece Greece Greenland Greenland Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300	6 38 15 3 34 50 1509 39	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guine-Bissau Guinee Guyana	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl.	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222 1.222
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27	1.224 1.224 1.221 1.223 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222 1.222 1.222 1.222
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805 3392 3707 1980	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5	1,224 1,224 1,221 1,221 1,225 1,221 1,219 1,057 1,22 1,222 1,222 1,222 1,222 1,224 1,207 1,225
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland Iceland	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi Keflavik	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi Keflavik	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 2286 3767 2805 3392 3707 1980 3052	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5 151 2 552	1.224 1.224 1.221 1.221 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222 1.222 1.225 1.225 1.225 1.225 1.225 1.225 1.225 1.225 1.225 1.221 1.207 1.225
Greece Greece Greece Greece Greenland Greenland Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland Iceland Iceland	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi Keflavik Reykjavik	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi Keflavik Reykjavik	2100 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805 3392 3707 1980 3052 1825	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5 151 2 52 14	1.224 1.224 1.221 1.221 1.225 1.225 1.219 1.057 1.22 1.222 1.222 1.222 1.222 1.225 1.222 1.225 1.207
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland Iceland Iceland India	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805 3392 3707 1980 3052 1825 2743	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5 151 2 52 14 555	1,224 1,224 1,221 1,221 1,225 1,219 1,057 1,22 1,222 1,222 1,225 1,222 1,225 1,225 1,219 1,219 1,219 1,219 1,219 1,219 1,219 1,219 1,219 1,219
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland Iceland India India	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805 3992 3707 1980 3052 1825 2743 3307	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5 151 2 52 14 55 1008	1.224 1.224 1.221 1.221 1.223 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222 1.222 1.222 1.222 1.222 1.223 1.223 1.219 1.207 1.219 1.219 1.219 1.219 1.219 1.219 1.11
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland Iceland India India India	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Bombay	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Jawaharial Nehru Intl	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805 392 3707 1980 3052 1825 2743 3307 3489	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5 151 2 52 14 555 1008 8	1,224 1,224 1,221 1,221 1,225 1,221 1,219 1,057 1,22 1,222 1,222 1,222 1,222 1,225 1,222 1,224 1,207 1,225 1,219 1,219 1,219 1,219 1,111 1,124
Greece Greece Greece Greece Greenland Greenland Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland Iceland Iceland India India India India	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Bombay Calcutta	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Jawaharial Nehru Intl N.S. Chandra Bose Intl.	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805 3992 3707 1980 3052 1825 2743 3307 3489 3627	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5 151 2 52 14 555 1008 8 8 5	1.224 1.224 1.221 1.221 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222 1.222 1.225 1.225 1.225 1.225 1.225 1.225 1.221 1.207 1.219 1.219 1.219 1.11 1.224 1.224 1.224
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland Iceland India India India India	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Bombay	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Jawaharial Nehru Intl	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805 3792 3707 1980 3052 1825 2743 3307 3489 3627 3810	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5 151 2 52 14 555 1008 8	1.224 1.224 1.221 1.221 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222 1.222 1.222 1.225 1.222 1.225 1.224 1.207 1.225 1.219 1.11 1.11 1.124
Greece Greece Greece Greece Greenland Greenland Guine-Bissau Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland Iceland India India India India India India	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Bombay Calcutta Delhi	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Jawaharial Nehru Intl N.S. Chandra Bose Intl. Delhi Intl.	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805 3992 3707 1980 3052 1825 2743 3307 3489 3627	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5 151 2 52 14 55 1008 8 5 227	1.224 1.224 1.221 1.221 1.225 1.221 1.219 1.057 1.22 1.222 1.222 1.222 1.225 1.222 1.225 1.224 1.207 1.225 1.219 1.207 1.225 1.219 1.11 1.224 1.224 1.224 1.219
Greece Greece Greece Greenland Greenland Guatemala Guinee Guyana Hawaiian Islands Honduras Hong Kong Hungary Iceland Iceland Iceland India	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Sonderstrom Guatemala Bissau Conakry Georgetown Honolulu San Pedro Sula Hong Kong Budapest Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Bombay Calcutta Delhi Goa	Samos Santorini Skiathos Zakinthos Narsarsuaq Kangerlussuaq La Aurora Osvaldo Vieira Gbessia Timehri Intl Honolulu Intl. La Mesa Kai Tak Ferihegy Akureyi Keflavik Reykjavik Ahmedabad Bangalore Jawaharial Nehru Intl N.S. Chandra Bose Intl. Delhi Intl. Dabolim	2100 2120 1570 2220 1830 2815 2987 3200 3300 2286 3767 2805 3392 3707 1980 3052 1825 2743 3307 3489 3627 3810	6 38 15 3 34 50 1509 39 22 29 4 27 5 151 2 52 14 55 1008 8 5 227 56	1,224 1,224 1,221 1,221 1,225 1,221 1,219 1,057 1,22 1,222 1,222 1,225 1,222 1,225 1,225 1,219 1,219 1,219 1,219 1,219 1,11 1,224 1,204 1,198 1,198 1,218

Country	City Name	Airport Name	Length	Elevation	ρ
			(m)	(m)	(kg/m^3)
India	Nagpur	Nagpur	3200	308	1.189
India	Port Blair	Port Blair	1829	5	1.224
India	Trivandrum	Trivandrum	2972	4	1.225
Indonesia	Ambon	Pattimura	1850	10	1.224
Indonesia Indonesia	Bali Biak	Bali Intl.	3000	4 14	1.225 1.223
Indonesia	Jakarta Halim Perdanakusuma	Kaisiepo Halim Perdanakusuma	3570 3000	26	1.223
Indonesia	Jakarta Intl	Soerkarno-Hatta Intl.	3660	10	1.224
Indonesia	Kupang	El Tari	1850	102	1.213
Indonesia	Medan	Polonia	2900	27	1.222
Indonesia	Surabaya	Juanda	3000	3	1.225
Indonesia	Ujung Pandang	Hasanuddin	2500	14	1.223
Iran	Shiraz	Shiraz Intl.	4270	1500	1.058
Iran	Tabriz	Tabriz	3658	1358	1.073
Iran Iraq	Tehran	Mehrabad Saddam Intl.	4000 4000	1208 34	1.089 1.221
Iraq Ireland	Baghdad Connaught	Connaught	2300	203	1.221
Ireland	Cork	Cork	2134	153	1.207
Ireland	Donegal	Carrickfin	1450	8	1.224
Ireland	Dublin	Dublin	2637	74	1.216
Ireland	Galway	Carnmore	1350	27	1.222
Ireland	Kerry	Farranfore	1239	30	1.221
Ireland	Shannon	Shannon	3200	14	1.223
Ireland	Waterford	Waterford	1433	36	1.221
Israel	Jerusalem	Atarot	1965	757	1.138
Israel	Ovda	Ovda	3000	455	1.172
Israel	Tel Aviv	Ben Gurion Intl.	3657	41	1.22
Italy	Alghero	Fertillia	3000	27	1.222
Italy	Ancona Bari	Falconara	3000	15	1.223 1.219
Italy		Palese Mcchie Orio Al Serio	2440 2800	54 237	1.219
Italy Italy	Bergamo Bologna	Bologna	2450	38	1.197
Italy	Brindisi	Casale	2628	15	1.223
Italy	Cagliari	Elmas	2800	4	1.225
Italy	Catania	Fontanarossa	2550	13	1.223
Italy	Florence	Peretola	1400	41	1.22
Italy	Forli	Forli	2410	30	1.221
Italy	Genoa	Sestri	3025	3	1.225
Italy	Lamezia Terme	Lamezia Terme	2400	12	1.224
Italy	Milan Linate	Linate	2440	108	1.212
Italy	Milan Malpensa	Malpensa	3915	234	1.198
Italy	Naples Olbia	Naples Costa Smeralda	2640 2445	90 11	1.214 1.224
Italy Italy	Palermo	Punta Raisi	3420	20	1.223
Italy	Parma	Parma	1640	50	1.219
Italy	Pescara	Pescara	2380	15	1.223
Italy	Pisa	Pisa	2987	3	1.225
Ivory Coast	Abidjan	Port Bouet	2700	6	1.224
Ivory Coast	Yamoussoukro	Yamoussoukro	3000	212	1.2
Jamaica	Kingston	Kingston	2678	3	1.225
Jamaica	Montego Bay	Sangster Intl	2653	1	1.225
Japan	Chitose	Chitose Aiport [New]	2999	22	1.222
Japan	Fukuoka	Fukuoka	2800	9	1.224
Japan	Hakodate	Hakodate	2500	33	1.221
Japan	Iwakuni Kagashima	Iwakuni Kagashima	2438	2 272	1.225 1.193
Japan Japan	Kagoshima Nagasaki	Kagoshima Nagasaki	3000 2999	272	1.193
Japan	Nagoya	Nagasaki Nagoya	2740	14	1.223
Japan	Osaka Itami	Itami	2999	12	1.224
Japan	Osaka Kansai	Kansai Intl.	3500	5	1.224
Japan	Sendai	Sendai	2499	2	1.225
Japan	Tokyo Haneda	Haneda	3150	5	1.224
Japan	Tokyo Narita	Narita	4000	41	1.22
Japan	Tokyo Yokota	Yokota	3353	139	1.209
Kenya	Kisumu	Kisumu	2040	1157	1.094
Kenya	Malindi	Malindi	1402	24	1.222
Kenya	Mombasa Nairobi	Moi Ioma Kanyatta	3350 4117	60 1624	1.218 1.045
Kenya Latvia	Riga	Jomo Kenyatta Riga Intl.	2557	1024	1.045
Lesotho	Maseru	Moshoeshoe 1	3200	1631	1.044
Liberia	Monrovia Intl	Roberts Intl.	3353	9	1.044
Liberia	Monrovia Spriggs Payne	Spriggs Payne	1829	8	1.224
Libya	Benghazi	Benina	3600	132	1.21
Libya	Kufra	Kufra	3660	398	1.179
Libya	Sebha	Sebha Intl.	3600	435	1.175
Libya	Tripoli	Tripoli Intl.	3600	80	1.216
Lithunia	Vilnius	Vilnius	2500	197	1.202
Luxembourg	Luxembourg	Luxembourg	4000	376	1.181
Madagascar	Antananarivo	Ivato	3100	1279	1.081
Madagascar	Mahajanga	Amborovy	2200	26	1.222
Madagascar	St. Dennis	Gillot	2670	20	1.223
Madagascar	Toamasina	Toamasina	2200	6	1.224
Madeira	Funchal	Funchal	1800	58	1.218
Madeira	Porto Santo	Porto Santo	2440	98	1.213

Country	City Name	Airport Name	Length (m)	Elevation (m)	$\frac{\rho}{(kg/m^3)}$
Malawi	D1	Chileka	2325	779	1.136
Malawi	Blantyre Karonga	Karonga	1280	538	1.163
Malawi	Lilongwe	Kamuzu Intl.	3540	1230	1.086
Malawi	Mzuzu	Mzuzu	1308	1254	1.084
Malaysia & Brunei	Alor Setar	Sultan Abdul Halim	1963	5	1.224
Malaysia & Brunei	Brunei Intl.	Bandar Seri Begawan	3658	22	1.222
Malaysia & Brunei	Johor Bahru	Johor Bahru	3354	41	1.22
Malaysia & Brunei	Kota Bharu	Sultan Ismail Petra	1981	5	1.224
Malaysia & Brunei	Kota Kinbalu	Kota Kinbalu	2987	3	1.225
Malaysia & Brunei	Kuala Lumpur	Simpang	1878 3780	34 27	1.221 1.222
Malaysia & Brunei Malaysia & Brunei	Kuala Lumpur Intl. Labuan	Kuala Lumpur Intl. Labuan	2287	31	1.221
Malaysia & Brunei	Male Intl.	Male Intl.	3360	1	1.225
Malaysia & Brunei	Miri	Miri	2103	17	1.223
Malaysia & Brunei	Penang Intl.	Penang Intl.	3048	3	1.225
Malaysia & Brunei	Sibu	Sibu	1981	35	1.221
Malaysia & Brunei	Tawau	Tawau	1707	23	1.222
Mali	Bamako	Senou	2700	380	1.181
Mali	Mopti	Barbe	2500	276	1.193
Mali	Nioro	Nioro	1500	237	1.197
Mali	Tombouctou	Tombouctou	1500	263	1.194
Malta	Luqa	Luqa	3544	91	1.214
Mauritania	Nouadhibou	Nouadhibou	2425	5	1.224
Mauritania	Nouakchott	Nouakchott	3000	2	1.225
Mauritius	Plaisance	Plaisance Intl.	2591	57	1.218
Mexico Mexico	Acapulco	Acapulco Intl	3299 2500	5 10	1.224 1.224
Mexico Mexico	Campeche Cancun	Campeche Cancun	2500 3500	7	1.224
Mexico	Cancun Chetumal	Cancun Chetumal	2207	12	1.224
Mexico	Cozumel	Cozumel	2700	5	1.224
Mexico	Guadalajara	Dom Migel Hidalgo	3999	1528	1.055
Mexico	Ixtapa-Zihuatanejo	Ixtapa-Zihuatanejo	2500	6	1.224
Mexico	Merida	Merida	2700	10	1.224
Mexico	Mexico City	B. Juarez Intl	3900	2238	0.982
Mexico	Tampico	Tampico	2553	24	1.222
Morocco	Agadir	Al Massirah	3200	70	1.217
Morocco	Al Hoceima	Cote Du Rif	2160	27	1.222
Morocco	Casablanca Anfa	Anfa	1880	62	1.218
Morocco	Casablanca Intl	Mohamed V	3720	200	1.202
Morocco Morocco	Laayoune	Hassan Ist Menara	2700	63 468	1.218 1.171
Morocco	Marrakech Ouarzazate	Ouarzazate	3100 3000	1139	1.096
Morocco	Oujda	Angad	3000	468	1.171
Morocco	Rabat	Sale	3500	84	1.215
Morocco	Tangier	Boukhalf	3500	19	1.223
Morocco	Tetouan	Sania Ramel	1700	10	1.224
Mozambique	Beira	Beira	2400	10	1.224
Mozambique	Inhambane	Inhambane	1500	9	1.224
Mozambique	Maputo	Maputo	3660	44	1.22
Mozambique	Nampula	Nampula	2000	440	1.174
Mozambique	Tete	Chingodzi	2500	160	1.206
Mozambique	Vilankulu	Vilankulu	1470	14	1.223
Nepal	Kathmandu	Tribhuvan	3050	1338	1.075
Netherlands Netherlands	Amsterdam Eelde	Schipol Groningen	3453 1800	-3 5	1.225 1.224
Netherlands Netherlands	Eindhoven	Eindhoven	3000	23	1.224
Netherlands	Lelystad	Lelystad	1250	-4	1.225
Netherlands	Maastricht	Maastricht	2500	115	1.211
Netherlands	Rotterdam	Rotterdam	2200	-4	1.225
New Zealand	Auckland	Auckland Intl.	3635	7	1.224
New Zealand	Christchurch	Christchurch Intl.	3287	37	1.221
New Zealand	Wellington	Wellington Intl.	1935	12	1.224
Niger	Agades	Sud	2300	505	1.167
Niger	Niamey	Niamey	3000	222	1.199
Niger	Zinder	Zinder	1825	460	1.172
Nigeria	Calabar	Calabar	2450	64	1.217
Nigeria Nigeria	Enugu Ibadan	Enugu Ibadan (New)	2400 2400	142 221	1.208 1.199
Nigeria Nigeria	Ilorin	Ibadan (New) Ilorin	3100	343	1.199
Nigeria	Jos	Jos	3000	1290	1.08
Nigeria	Kaduna	Kaduna (New)	3000	632	1.152
Nigeria	Kano	Mallam Aminu Intl.	3300	477	1.17
Nigeria	Lagos	Murtala Muhammed	3900	41	1.22
Nigeria	Maiduguri	Maiduguri	3000	336	1.186
Nigeria	Port Haircourt	Port Haircourt	3000	25	1.222
Nigeria	Sokoto	Sokoto	3000	307	1.189
Nigeria	Yola	Yola	2400	183	1.204
Norway	Alesund	Vigra	1600	22	1.222
Norway	Bergen	Flesland	2450	50	1.219
Norway	Floro	Floro	860	9	1.224
Norway	Harstad Narvik Haugesund	Evenes Karmony	2658 1720	26 23	1.222 1.222
Norway Norway	Kirkenes	Hoybuktmoen	1600	91	1.222
Norway	Kristiansand Kjevik	Kjevik	1870	17	1.223
1.01 way	III	11JU 11K	1010	11	1.220

Country	City Name	Airport Name	Length	Elevation	ρ 2.
			(m)	(m)	(kg/m^3)
Norway	Kristiansand Kvernberget	Kvernberget	1760	62	1.218
Norway	Oslo Fornebu	Fornebu	2370	16	1.223
Norway Norway	Oslo Gardermoen Stavanger	Gardermoen Sola	3200 2555	205 9	1.201 1.224
Norway	Torp	Torp	2440	87	1.215
Norway	Tromso	Tromso	2158	9	1.224
Oman	Muscat	Seeb	3585	15	1.223
Oman	Salalah	Salalah	3340	22	1.222
Pakistan	Islamabad	Chaklala	2743	508	1.166
Pakistan	Karachi	Karachi	3200	30	1.221
Pakistan	Lahore	Lahore	2743	213	1.2
Pakistan	Nawabshah	Nawabshah	2743	28	1.222
Papua New Guinea	Port Moresby	Jacksons	2750	38	1.221
Philippines	Mactan	Lapu Lapu	2591	10	1.224
Philippines	Manila Intl.	Manila Intl.	3353 2800	23	1.222
Poland Poland	Gdansk Krakow	Gdansk Krakow	2400	148 241	1.208 1.197
Poland	Poznan	Poznan	2500	94	1.214
Poland	Warsaw	Okecie	3690	110	1.212
Portugal	Faro	Faro	2490	7	1.224
Portugal	Lisbon	Lisbon	3805	114	1.212
Portugal	Oporto	Francisco Sa Carneiro	3480	69	1.217
Puerto Rico	San Juan	Luis Munoz Marin Intl	3048	3	1.225
Qatar	Doha	Doha	4572	11	1.224
Romania	Bucharest Baneasa	Baneasa	3000	90	1.214
Romania	Bucharest Otopeni	Otopeni	3500	95	1.214
Romania	Constanta	Kogainiceanu	3500	108	1.212
Romania	Timisoara	Giarmata	3500	106	1.213
Russia	Khabaraovsk	Novy	4000	75	1.216
Russia	Moscow Shremetievo	Sheremetievo	3700	191	1.203
Russia Russia	Moscow Vnukovo Novosibirsk	Vnukovo	3060	209	1.201 1.212
Russia	Orenburg	Tolmachevo Tsentralny	3599 2500	111 118	1.212
Russia	Samara	Kurumoch	3001	146	1.208
Russia	St. Petersburg	Pulkovo	3782	24	1.222
Russia	Tver	Migalovo	2500	143	1.208
Russia	Yakutsk	Yakutsk	3400	99	1.213
Sao Tome & Principe	Sao Tome	Sao Tome	2220	10	1.224
Saudi Arabia	Abha	Abha	3350	2090	0.997
Saudi Arabia	Al Jouf	Al Jouf	3300	689	1.146
Saudi Arabia	Arar	Badanah	3050	553	1.161
Saudi Arabia	Dharan	Dharan	3660	26	1.222
Saudi Arabia	Gassim	Gassim	3000	648	1.15
Saudi Arabia	Hafr-Al-Batin	Hafr-Al-Batin	3000	358	1.183
Saudi Arabia	Hail	Hail	3300	1015	1.11
Saudi Arabia Saudi Arabia	Jeddah Madinah	King Abdulaziz Madinah	3800	15 655	1.223 1.15
Saudi Arabia Saudi Arabia	Madinan Riyadh	Madinan King Khalid Intl.	3850 4200	625	1.15
Saudi Arabia	Taif	Taif	3735	1478	1.06
Saudi Arabia	Turaif	Turaif	3000	854	1.127
Saudi Arabia	Wejh	Wejh	3050	20	1.223
Senegal	Dakar	Yoff	3490	27	1.222
Seychelles	Seychlles	Seychelles Intl.	2987	3	1.225
Sierra Leone	Freetown	Lungi	3200	26	1.222
Singapore	Singapore Changi	Changi	4000	7	1.224
Singapore	Singapore Paya Lebar	Paya Lebar	3780	20	1.223
Slovak Republic	Bratislava	Ivanka	2950	133	1.209
Slovak Republic	Kosice	Kosice	3100	230	1.198
Slovak Republic	Poprad	Tatry	2600	716	1.143
Slovenia	Ljubljana	Ljubljana	3300	388	1.18
Slovenia	Maribor	Maribor	2500	267	1.194
Somalia Republic	Kismayu Magadishu	Kismayu Magadishu	3700	15	1.223 1.224
Somalia Republic South Africa	Mogadishu Beaufort West	Mogadishu Beaufort West	3150 1646	8 893	1.123
South Africa South Africa	Beaufort West Bethlehem	Beaufort West Bethlehem	1646 1250	893 1690	1.123
South Africa	Bisho	Bisho	2500	594	1.156
South Africa	Bloemfontein	J.B.M. Herzog	2559	1359	1.073
South Africa	Cape Town	D.F. Malan	3200	46	1.22
South Africa	Durban Louis Botha	Louis Botha	2443	8	1.224
South Africa	Durban Virginia	Virginia	930	6	1.224
South Africa	East London	East London	1935	131	1.21
South Africa	Ficksburg	Ficksburg	1400	1620	1.045
South Africa	George	P.W. Botha	2000	198	1.202
South Africa	Giyani	Giyani	1700	480	1.169
South Africa	Grahamstown	Grahamstown	1200	651	1.15
South Africa South Africa	Grand Central Grootfontein	Grand Central Grootfontein	1219 3560	1624 1408	1.045 1.067
South Africa	Heidelberg	Heidelberg	1175	1560	1.051
South Africa	Heilbron	Heilbron	1000	1585	1.049
South Africa	Johannesburg Intl	Jan Smuts	4418	1694	1.037
South Africa	Johannesburg Rand	Rand	1660	1668	1.04
South Africa	Keetmanshoop	Keetmanshoop	2316	1069	1.104
South Africa	Kigali	Rwanda	3500	1491	1.059
South Africa	Kimberley	B.J. Vorster	3000	1204	1.089

Country	City Name	Airport Name	Length (m)	Elevation (m)	$\frac{\rho}{(kg/m^3)}$
South Africa	Kleinsee	Kleinsee	1500	81	1.215
South Africa	Komatipoort	Komatipoort	2134	152	1.207
South Africa	Kroonstad	Kroonstad	1775	1433	1.065
South Africa	Ladysmith	Ladysmith	1200	1081	1.102
South Africa	Lanseria	Lanseria	3048	1377	1.071
South Africa	Lichtenburg	Lichtenburg	1266	1486	1.059
South Africa	Luderitz	Luderitz	1830	130	1.21
South Africa	Lydenburg	Lydenburg Malelane	1363	1469	1.061
South Africa South Africa	Malelane Margate	Margate	1020 1372	352 151	1.184 1.207
South Africa	Messina	Messina	1920	573	1.159
South Africa	Mmabatho	Mmabatho	4500	1276	1.081
South Africa	Nelspruit	Nelspruit	875	853	1.128
South Africa	Newcastle Sa	Newcastle	1500	1251	1.084
South Africa	Otjiwarongo	Otjiwarongo	2972	1095	1.101
South Africa	Phalaborwa	Hendrick Van Eck	1369	435	1.175
South Africa	Piet Retief	Piet Retief	1371	1347	1.074
South Africa South Africa	Pietermaritzburg	Pietermaritzburg Pietersburg (Civil)	1280 2200	739 1327	1.14 1.076
South Africa	Pietersburg Pilanesberg	Sun City	2000	1039	1.107
South Africa	Plettenberg Bay	Plettenberg Bay	1220	139	1.209
South Africa	Port Elizabeth	Port Elizabeth	1980	69	1.217
South Africa	Pretoria	Wonderbroom	1829	1248	1.084
South Africa	Queenstown	Queenstown	1200	1109	1.099
South Africa	Richards Bay	Richards Bay	1300	33	1.221
South Africa	Sishen	Sishen	1740	1173	1.093
South Africa	Thaba Nchu	Thaba Nchu	2000	1503	1.057
South Africa	Ulundi	Ulundi Piarra Van Punavald	1640	525	1.164
South Africa South Africa	Upington Vereeniging	Pierre Van Ryneveld Vereeniging	4900 1605	850 1477	1.128 1.06
South Africa	Victoria West	Victoria West	1762	1256	1.084
South Africa	Vryheid	Vryheid	1139	1158	1.094
South Africa	Welkom	Welkom	2005	1341	1.074
South Africa	Windhoek Eros	Eros	1829	1702	1.036
South Africa	Windhoek Intl	Windhoek Intl.	4532	1719	1.035
South Korea	Cheju	Cheju Intl.	3000	36	1.221
South Korea	Pusan	Kimhae Intl.	2743	4	1.225
South Korea	Seoul	Kimpo Intl.	3600	18	1.223
Spain Spain	Alicante Almeria	Alicante Almeria	3000 3200	43 22	1.22 1.222
Spain	Asturias	Asturias	2200	127	1.21
Spain	Barcelona	Barcelona	3108	4	1.225
Spain	Bilbao	Bilbao	2600	42	1.22
Spain	Cordoba	Cordoba	1380	90	1.214
Spain	Gerona	Gerona	2400	143	1.208
Spain	Granda	Granda Ibiza	2900	567	1.16
Spain Spain	Ibiza Jerez	Jerez	2800 2300	7 28	1.224 1.222
Spain	La Coruna	La Coruna	1940	100	1.213
Spain	Madrid Barajas	Barajas	4100	609	1.155
Spain	Madrid Getafe	Getafe	2480	618	1.154
Spain	Malaga	Malaga	3200	16	1.223
Spain	Minorca	Minorca	2350	88	1.215
Spain	Palma	Palma	3270	10	1.224
Spain	Pamplona	Pamplona	2207	459	1.172
Spain Spain	Reus Salamanca	Reus Salamanca	2200 2500	71 793	1.217 1.134
Spain	San Sebastian	San Sebastian	1754	793 5	1.134
Spain	Santander	Santander	2400	6	1.224
Spain	Santiago	Santiago	3200	370	1.182
Spain	Seville	Seville	3360	34	1.221
Spain	Valencia	Valencia	2700	69	1.217
Spain	Vigo	Vigo	2400	262	1.194
Spain	Vitoria	Vitoria	3500	513	1.166
Sri Lanka	Colombo Intl	Katunayake Ratmalana	3350	9	1.224
Sri Lanka Sri Lanka	Colombo Ratmalana Jaffna	Jaffna	1833 2134	7 10	1.224 1.224
Sudan	Geneina	Geneina	1880	808	1.133
Sudan	Juba	Juba	2400	460	1.172
Sudan	Khartoum	Khartoum	3000	384	1.18
Swaziland	Matsapha	Manzini	2600	632	1.152
Sweden	Angelholm	Angelholm	2000	20	1.223
Sweden	Borlange	Borlange	2312	153	1.207
Sweden Sweden	Gothenburg	Save Jonkoping	1926 2200	20 226	1.223 1.199
Sweden	Jonkoping Kalmar	Kalmar	2050	6	1.199
Sweden	Karlstad	Karlstad	1530	46	1.224
Sweden	Malmo	Sturup	2800	72	1.217
Sweden	Mora	Siljan	1810	193	1.202
Sweden	Norkoping	Kungsangen	2200	5	1.224
Sweden	Orebro	Orebro	2000	57	1.218
Sweden	Stockholm Arlanda	Arlanda	3300	37	1.221
Sweden	Stockholm Broma	Bromma	1787 1900	14 4	1.223
Sweden	Sundsvall	Harnosand	1900	4	1.225

Country	City Name	Airport Name	Length	Elevation	ρ (1 / 3)
G 1	**	**	(m)	(m)	(kg/m^3)
Sweden Sweden	Umea Visby	Umea Visby	2000 2000	7 51	1.224 1.219
Switzerland	Berne	Belp	1310	510	1.166
Switzerland	Geneva	Geneva	3900	430	1.175
Switzerland	Sion	Sion	2000	482	1.169
Switzerland	Zurich	Zurich	3700 3600	432	1.175
Syria Taiwan	Damascus Kaohsiung Intl.	Damascus Intl. Kaohsiung Intl.	3150	616 9	1.154 1.224
Taiwan	Taipei Intl.	Chiang Kai Shek	3660	22	1.222
Tanzania	Dar Es Salaam	Dar Es Salaam	1639	1387	1.07
Tanzania	Kilimanjaro	Kilimanjaro	3600	894	1.123
Tanzania	Mtwara	Mtwara	2258	113	1.212
Tanzania Tanzania	Mwanza Pemba	Mwanza Karume	3300 1525	1147 24	1.095 1.222
Tanzania	Tabora	Tabora	1786	1179	1.092
Tanzania	Tanga	Tanga	1268	39	1.22
Tanzania	Zanzibar	Kisauni	2462	16	1.223
Tchad	N'Djamena	N'Djamena	2800	295	1.191
Thailand Thailand	Bangkok Chiang Mai	Bangkok Chiang Mai	3700 3100	3 315	1.225 1.188
Thailand	Phuket	Phuket	2999	25	1.222
Thailand	Songkhla	Hat Yai Intl.	3050	27	1.222
Thailand	Surat Thani	Surat Thani	2500	6	1.224
Togo	Lome	Tokoin	3000	22	1.222
Trinidad & Tobago Trinidad & Tobago	Port Of Spain Scarborough	Piarco Crown Point	3200 2744	17 11	1.223 1.224
Tunisia Tobago	Jerba	Zarzis	3100	5	1.224
Tunisia	Monastir	Habib Bourguiba Intl	2950	2	1.225
Tunisia	Sfax	Thyna	3000	26	1.222
Tunisia	Tozeur	Nefta	3225	87	1.215
Tunisia Turkey	Tunis Adana	Carthage Sakirpasa	3200 2750	6 20	1.224 1.223
Turkey	Ankara	Esenboga	3752	953	1.116
Turkey	Dalaman	Mugla	3000	6	1.224
Turkey	Istanbul	Ataturk	3000	48	1.219
Turkey	Izmir	Adnan Menderes	3240	126	1.21
Turkmenistan Uganda	Ashkhabad Entebbe	Ashkhabad Entebbe	3000 3658	210 1153	1.2
Ukraine	Kiev	Borispol	3610	130	1.095
Ukraine	Lvov	Lvov	2510	326	1.187
Ukraine	Odessa	Odessa	2800	52	1.219
United Arab Emirates	Abu Dhabi	Abu Dhabi Intl	4100	27	1.222
United Arab Emirates United Arab Emirates	Abu Dhabi Dubai	Bateen Dubai	3200 4000	5 10	1.224 1.224
United Arab Emirates United Arab Emirates	Fujairah	Fujairah Intl.	3750	46	1.224
United Arab Emirates	Ras Al Khaimah	Ras Al Khaimah	3760	31	1.221
United Arab Emirates	Sharjah	Sharjah Intl.	3760	34	1.221
United Kingdom	Aberdeen	Aberdeen	1829	66	1.217
United Kingdom United Kingdom	Alderney Ascension Is.	Alderney Wideawake	880 3048	89 83	1.215 1.215
United Kingdom	Barrow	Walney Island	1205	14	1.223
United Kingdom	Bedford	Bedford	3200	89	1.215
United Kingdom	Belfast	Aldergrove	2777	81	1.215
United Kingdom United Kingdom	Belfast Bembridge	City Bembridge	1829 837	5 17	1.224 1.223
United Kingdom United Kingdom	Benbecula	Benbecula	1651	6	1.224
United Kingdom	Biggin Hill	Biggin Hill	1808	183	1.204
United Kingdom	Birmingham Uk	Birmingham	2255	99	1.213
United Kingdom	Blackbushe	Blackbushe	1342	100	1.213
United Kingdom United Kingdom	Blackpool Bournemouth	Blackpool Bournemouth	1829 1838	10 11	1.224 1.224
United Kingdom United Kingdom	Bristol	Bristol	2011	189	1.224
United Kingdom	Cambridge	Cambridge	1965	15	1.223
United Kingdom	Cardiff	Cardiff	2134	67	1.217
United Kingdom	Carlisle	Carlisle	1837	58	1.218
United Kingdom United Kingdom	Coventry Cranfield	Coventry Cranfield	1615 1807	86 111	1.215 1.212
United Kingdom United Kingdom	Dundee	Cranneid Dundee	1100	4	1.212
United Kingdom	East Midlands	East Midlands	2280	94	1.214
United Kingdom	Edinburgh	Edinburgh	2560	41	1.22
United Kingdom	Exeter	Exeter	2083	31	1.221
United Kingdom United Kingdom	Glasgow Gloucestershire	Glasgow Gloucestershire	2658 1421	8 29	1.224 1.222
United Kingdom	Guernsey	Guernsey	1463	102	1.213
United Kingdom	Humberside	Humberside	2200	37	1.221
United Kingdom	Inverness	Dalcross	1887	9	1.224
United Kingdom	Islay	Islay	1545	16	1.223
United Kingdom United Kingdom	Isle Of Man Jersey	Ronaldsway Jersey	1753 1706	17 84	1.223 1.215
United Kingdom United Kingdom	Kirkwall	Kirkwall	1432	15	1.223
United Kingdom	Leeds Bradford	Leeds Bradford	2250	208	1.201
United Kingdom	Liverpool	Liverpool	2286	25	1.222
United Kingdom	London City	City	1030	5	1.224
United Kingdom	London Gatwick	Gatwick	3159	62	1.218

Country	City Name	Airport Name	Length	Elevation	ρ
Country	City Ivame	Anport Name	(m)	(m)	(kg/m^3)
United Kingdom	London Heathrow	Heathrow	3902	24	1.222
United Kingdom United Kingdom	London Stansted	Stansted	3048	106	1.213
United Kingdom	Luton	Luton	2160	160	1.206
United Kingdom	Lydd	Lydd	1504	3	1.225
United Kingdom	Manchester	Manchester	3048	78	1.216
United Kingdom	Manston	Manston	2752	54	1.219
United Kingdom United Kingdom	Newcastle Oxford	Newcastle Kidlington	2332 1554	81 82	1.215 1.215
United Kingdom United Kingdom	Plymouth	City	1170	144	1.208
United Kingdom	Prestwick	Prestwick	2987	20	1.223
United Kingdom	Southamptom	Eastleigh	1723	13	1.223
United Kingdom	Southend	Southend	1605	15	1.223
United Kingdom	Stornoway	Stornoway	2198	8	1.224
United Kingdom	Sumburgh	Sumburgh	1426	5	1.224
United Kingdom United Kingdom	Swansea Teeside	Swansea Teeside	1472 2291	90 37	1.214 1.221
United Kingdom United Kingdom	Tiree	Tiree	1350	12	1.224
United Kingdom	Unst	Unst	640	19	1.223
United Kingdom	Wick	Wick	1609	38	1.221
United States	Albuquerque	Albuquerque	4077	1631	1.044
United States	Atlanta	Wm. B. Hartsfield	3624	313	1.189
United States	Atlantic City	Atlantic City	3048	23	1.222
United States United States	Baltimore Bangor	Washington Intl Bangor Intl	2901 3486	45 59	1.22 1.218
United States United States	Bedford	Bedford	2134	41	1.22
United States	Birmingham Us	Birmingham Intl	2438	196	1.202
United States	Boston	Logan Intl	3073	6	1.224
United States	Buffalo	Buffalo	2469	221	1.199
United States United States	Burlington	Burlington	2380	102	1.213
United States United States	Casper Central Florida Regional	Natrona County Intl Sanford	3231 2438	1630 17	1.044 1.223
United States United States	Charleston Charleston	Charleston	2743	14	1.223
United States	Charlotte	Douglas	3048	228	1.198
United States	Chattanooga	Lovell Field	2256	208	1.201
United States	Cheyenne	Cheyenne	2804	1876	1.019
United States	Chicago	Chicago O'Hare	3962	203	1.201
United States United States	Cincinnati Clearwater	Northern Kentucky Intl Clearwater	3048 2591	272	1.193 1.225
United States United States	Cleveland	Cleveland	2591	3 241	1.197
United States	Colarado Springs	City Of Colarado	4115	1881	1.018
United States	Columbia	Columbia Met	2621	72	1.217
United States	Columbus	Port Columbus	3261	249	1.196
United States	Dallas	Dallas Fort Worth	4084	184	1.203
United States	Dallas Denver	Love Field	2682	148	1.208
United States United States	Denver Des Moines	Denver Intl Des Moines	3658 2743	1655 292	1.041 1.191
United States United States	Detroit Wayne	Wayne	3658	195	1.202
United States	Detroit Willow Run	Willow Run	2294	218	1.199
United States	Duluth	Duluth Intl	3094	435	1.175
United States	Everett	Snohomish County	2746	185	1.203
United States	Fargo	Hector Intl	2910	274	1.193
United States United States	Fort Lauderdale Fresno	Fort Lauderdale Fresno	2743 2811	3 101	1.225 1.213
United States United States	Grand Junction	Walker Field	3201	1481	1.213
United States	Great Falls	Great Falls	3200	1120	1.098
United States	Houston	Houston Intl	3658	30	1.221
United States	Huntsville	Huntsville	3048	192	1.203
United States	Indianapolis	Indianapolis Intl	3050	243	1.197
United States United States	Jacksonville	Jacksonville Intl	2438 3292	9 312	1.224 1.189
United States United States	Kansas City Intl Knoxville	Kansas City Intl Knoxville	3292 2746	299	1.189
United States United States	Las Vegas	Las Vegas	3851	663	1.149
United States	Long Beach	Long Beach	3048	18	1.223
United States	Los Angeles	Los Angeles Intl	3685	38	1.221
United States	Louisville	Standiford Field	3048	151	1.207
United States	Memphis Intl	Memphis Intl	2840	101	1.213
United States United States	Miami Milwaukee	Miami Intl Milwaukee	3962 2954	3 220	1.225 1.199
United States United States	Minneapolis	Minneapolis	3048	256	1.195
United States	Montgomery	Montgomery	2744	67	1.217
United States	Moses Lake	Grant County	4115	361	1.183
United States	Nashville	Nashville	3362	182	1.204
United States	New Orleans	New Orleans	3072	1	1.225
United States United States	New York La Cuardia	John F. Kennedy La Guardia	4442	4 7	1.225
United States United States	New York La Guardia Newark	La Guardia Newark Intl	2134 2835	7 5	1.224 1.224
United States United States	Newark Newburgh	Stewart	3602	144	1.208
United States	Newport News	Williamsburg Intl	2439	12	1.224
United States	Niagara Falls	Niagara Falls	2781	180	1.204
United States	Norfolk	Norfolk Intl	2743	8	1.224
United States	Oakland	Oakland	3048	2	1.225
United States	Omaha	Eppley	2591	300	1.19
United States United States	Ontario Orlando	Ontario Intl Orlando	3719 3659	287 29	1.192 1.222
United States	Oriando	Oriando	3009	49	1.444

Country	City Name	Airport Name	Length	Elevation	ρ
	-	_	(m)	(m)	(kg/m^3)
United States	Philadelphia	Philadelphia	3200	6	1.224
United States	Phoenix	Sky Harbor	3353	345	1.185
United States	Pittsburgh	Pittsburgh	3505	367	1.182
United States	Portland	Portland Intl	3356	8	1.224
United States	Portland	Portland Intl Jetport	2073	23	1.222
United States United States	Pressque Isle Pueblo Memorial	Northern Maine Regional Pueblo Memorial	2268	163 1440	1.206 1.064
United States United States	Reno Memoriai	Cannon Intl	3200 3048	1345	1.064
United States	Richmond	Richmond	2743	51	1.219
United States	Sacramento	Metroplolitan	2621	7	1.224
United States	Salt Lake City	Salt Lake City	3658	1288	1.08
United States	San Antonio	San Antonio Intl	2591	247	1.196
United States	San Diego	San Diego	2865	5	1.224
United States	San Francisco	San Francisco	3618	3	1.225
United States	Savannah	Savannah	2850	16	1.223
United States	Seattle	Tacoma	3627	131	1.21
United States	Seattle Boeing Field	King County Intl	3048	5	1.224
United States	Sioux Falls	Sioux Falls	2743	435	1.175
United States United States	Spokane Intl	Spokane Intl St. Louis Intl	2743 3359	723 184	1.142 1.203
United States United States	St. Louis Syracuse	Hancock Intl	2745	128	1.203
United States United States	Tampa	Tampa Intl	3353	8	1.224
United States	Washington Dulles	Dulles	3505	95	1.214
United States	Washington National	National	2094	5	1.224
United States	West Palm Beach	West Palm Beach	2436	6	1.224
United States	Wilmington	New Hanover County	2438	10	1.224
United States	Windsor Locks	Windsor Locks	2896	53	1.219
Uruguay	Montevideo	Carrasco	2700	32	1.221
Uzbekistan	Samarkand	Samarkand	3100	678	1.147
Uzbekistan	Tashkent	Yuzhnyy	4000	431	1.175
Venezuela	Caracas	Simon Bolivar	3500	72	1.217
Venezuela	Maracaibo	La Chinita	2490	65	1.217
Venezuela	Margarita	Del Caribe	3180	27	1.222
Vietnam Vietnam	Danang Hanoi	Danang Noibai	3048 3200	10 12	1.224 1.224
Vietnam	Hanoi Hochiminh	Tansonnhat	3200	10	1.224
Windward Islands	St. Lucia	Hewanorra Intl	2743	3	1.224
Yemen Arab Republic	Aden	Aden	3099	4	1.225
Yemen Arab Republic	Hodeidah	Hodeidah	3000	12	1.224
Yemen Arab Republic	Sanaa	Sanaa Intl.	3252	2206	0.985
Yemen Arab Republic	Taiz	Ganed	3000	1402	1.068
Yugoslavia	Belgrade	Belgrade	3400	102	1.213
Yugoslavia	Mostar	Mostar	2400	53	1.219
Yugoslavia	Ohrid	Ohrid	2550	705	1.144
Yugoslavia	Podgorica	Podgorica	2500	36	1.221
Yugoslavia	Sarajevo	Sarajevo	2600	518	1.165
Yugoslavia	Skopje	Skopje	2450	238	1.197
Yugoslavia	Tivat	Tivat	2500	6	1.224
Zaire	Kinshasa	Ndjili	3600	313	1.189
Zaire Zaire	Kisangani Lubumbashi	Bangoka Barrer Luano	3500 2700	432 1309	1.175 1.078
Zaire	Mbuji-Mayi	Mbuji-Mayi	2000	677	1.147
Zambia	Kasama	Kasama	2008	1384	1.07
Zambia	Livingstone	Livingstone	2292	991	1.112
Zambia	Lusaka	Lusaka Intl.	3962	1152	1.095
Zambia	Mansa	Mansa	1710	1250	1.084
Zambia	Mongu	Mongu	1463	1056	1.105
Zambia	N'Dola	N'Dola	2515	1270	1.082
Zimbabwae	Bulawayo	Bulawayo	2588	1331	1.076
Zimbabwae	Chiredzi	Buffalo Range	1578	433	1.175
Zimbabwae	Harare	Charles Prince	925	1478	1.06
Zimbabwae	Harare	Harare Intl.	4725	1494	1.058
Zimbabwae	Hwange	National Park	4500	1080	1.103
Zimbabwae Zimbabwae	Kariba Masvingo	Kariba Masvingo	1650 1726	520 1206	1.165 1.089
Zimbabwae	Masvingo Victoria Falls	Wasvingo Victoria Falls	2286	1064	1.104
Zimbabwac	victoria rans	victoria rans	4400	1004	1.104

Bibliographie

- [AS74] Milton Abramowitz et Irene A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Table. Dover Pubns, June 1974. ISBN: 0-486-61272-4.
- [Boi01a] Jean-Luc Boiffier. *Dynamique du Vol de l'avion*. Version 7.1. Notes de cours. SupAéro, Septembre 2001.
- [Boi01b] Jean-Luc Boiffier. Dynamique du Vol de l'avion : Recueil des Bureaux d'Études. Version 4. SupAéro, Octobre 2001.
- [Boi05] Jean-Yves Boiffier. *Pilote AirFrance*. AirFrance, d'après des conversations téléphoniques du 27 octobre 2004, du 4 et 26 mai 2005.
- [Bou04] Guy Bousquet. Senior Engineer Aircraft Performance. Airbus CE-EVT, 2004. Essais en vol.
- [CL00] Martine Cart-Lamy. Étude de faisabilité d'un dispositif de retraction automatique des systèmes hypersustentateurs lors du décollage dans le but d'optimiser les performances (A340). Airbus-SupAéro, 2000. Projet de Fin d'Études.
- [CT04] Jérôme Collier et Bang Trân. Étude et prévision de la V_{MC} d'un avion de ligne. SupAéro/Airbus., mars 2004. PIR : Projet d'Initiation à la Recherche, encadré par Jean-Luc Boiffier.
- [Dan03] Nicolas Daniel. Étude du positionnement optimal du plan horizontal de l'A380 pendant le décollage. Airbus-SupAéro, 2003. Projet de fin d'études encadré par Franck Delaplace et Jean-Luc Boiffier.
- [Dup92] W.P Dupont. Avant projet d'un avion de transport commercial. Aérospatiale-SupAéro A/DET/AP, 1992.
- [ESD72] ESDU. Low-speed longitudinal aerodynamic characteristics of aircraft in ground effect, volume 9a Stability of aircraft General. Longitudinal stability. ESDU, October 1972. ISBN: 0 85679 022 2. Data item No. 72023. Part: Aerodynamics.
- [ESD85] ESDU. Calculation of ground performance in take-off and landing, volume 6 Airfield performance (general). Landing. ESDU, November 1985.
 ISBN: 0 85679 535 6. Data item No. 85029. Part: Performance.
- [ESD00a] ESDU. Example of statistical analysis of wet runway friction: aircraft with extensive set of test data, volume 6 Airfield performance (general). Landing. ESDU, November 2000. ISBN: 1 86246 084 1. Data item No. 99016. Part: Performance.
- [ESD00b] ESDU. Example of statistical analysis of wet runway friction: aircraft with limited set of test data, volume 6 Airfield performance (general). Landing.

SUPAÉRO-ONÉRA BIBLIOGRAPHIE

- ESDU, November 2000. ISBN : 186246085 X. Data item No. 99017. Part : Performance.
- [ESD00c] ESDU. Example of statistical analysis of wet runway friction: Ground-test machine data, volume 6 Airfield performance (general). Landing. ESDU, October 2000. ISBN: 1 86246 121 X. Data item No. 00018. Part: Performance.
- [ESD00d] ESDU. Statistical analysis of wet runway friction for aircraft and ground-test machines, volume 6 Airfield performance (general). Landing. ESDU, October 2000. ISBN: 1 86246 083-3. Data item No. 99015. Part: Performance.
- [FAA98] Federal Aviation Administration FAA. Advisory Circular AC25-7A: Flight test guide for certification of transport category airplanes. U.S. Department of Transportation, March 1998.
- [FAA03] Federal Aviation Administration FAA. Federal Aviation Regulations FAR 25:
 Airworthiness Standards Transport Category Airplanes. U.S. Department of Transportation, 2003.
- [Gil92] Thomas D. Gillespie. Fundamentals of Vehicle Dynamics. Society of Automotive Engineers, Inc, 1992. ISBN: 1-56091-199-9.
- [Gra00] Jean-François Grandjean. Take-off performances with a single rate of rotation law. Airbus-SupAéro, 2000. Projet de fin d'études, encadré par Fernando Alonso et Jean-Luc Boiffier.
- [GVW69] L. George, J.-F. Vernet, et Jean-Claude Wanner. La mécanique du vol : performances des avions et des engins. Dunod-SupAéro, 1969.
- [Lau92] Attilio Lausetti. Decollo e atterramento aeroplani, idrovolanti trasportati. Libreria Editrice universitaria Levrotto & Bella Torino, 1992. Dipartimento di Aeronautica e Aerospaziale del Politecnico di Torino.
- [Lec02] Frédéric Leclerc. Notes de Cours de Structures. Airbus France-SupAéro, Mars 2002. version 3. Majeure de Dynamique du Vol.
- [Mar05] Frédéric Marani. Modèle avion A330-300 pour validation du modèle de décollage d'Élodie Roux. Airbus (EGVT/Low & High Speed Perfo), 16 mars 2005. Courrier à usage interne.
- [Mat96] Jack D. Mattingly. Elements of Gas Turbine Propulsion. McGraw-Hill International Editions, 1996. ISBN: 0-07-114521-4.
- [MB92] W. Austyn Mair et David L. Birdsall. *Aircraft performance*. Cambridge University Press, 1992. ISBN: 0-521-56836-6.
- [McC95] Barnes W. McCormick. Aerodynamics, aeronautics, and flight mechanics, chapter Airplane performance, page 360. John Wiley & Sons, 1995. ISBN: 0-471-57506-2.
- [MS00] Frédéric Marani et Patrick Sallier. BE de Dynamique du Vol des Mastères TAS : Panne moteur au décollage. SUPAÉRO-Airbus, 2000.
- [Nic84] Leland M. Nicolai. Fundamentals of Aircraft Design. METS, June 1984. ISBN: 9991295291.
- [OB96] René Orengo et René Boudet. Génie mécanique Organes de machines, volume B 5 III. Technique de l'ingénieur, 1996. ISSN : 0399-4104.
- [PL03] Emeline Pialat et Herve Loubignac. Étude comparative des V_{MC} sur les avions Airbus et Boeing. SupAéro/Airbus., mars 2003. PIR : Projet d'Initiation à la Recherche, encadré par Jean-Luc Boiffier.

BIBLIOGRAPHIE SUPAÉRO-ONÉRA

[Ros99] Jacques Rosay. Remarques sur le décollage. Airbus, d'après un courrier du 21 juin 1999. Chef pilote d'essai Airbus.

- [Ros05] Jacques Rosay. Essai en vol: intérêts des essais en vol, certification, types d'essais, équipe et moyens d'essais. Généralités et conception du cockpit de l'A380. Conférence SupAéro dans le cadre de l'enseignement de Dynamique du Vol, juin 2004 et 2005. Chef pilote d'essai Airbus.
- [Rou02] Élodie Roux. Pour une approche analytique de la Dynamique du Vol : Modèles Moteurs . . . , volume 1. SUPAÉRO-ONÉRA, 2002.
- [Sab05] Deborah Saban. Flight test guide. Airbus-SupAéro, 2005. Projet de Fin d'Études encadré par Stéphane Boissenin (Airbus) et Jean-Luc Boiffier (SupAéro).
- [She88] Richard S. Shevell. Fundamentals of flight Second Edition. Prentice Hall, August 1988. Stanford University. ISBN: 0133390608.
- [Tor86] Egbert Torenbeek. Synthesis of Subsonic Airplane Design. Delft University Press, Martinus Nijhoff Publishers, 1986. ISBN: 90-247-2724-3.
- [Vin93] Nguyen X. Vinh. Flight Mechanics of High-Performance Aircraft. Cambridge University Press, 1993. ISBN: 0-521-47852-9.
- [Zwi96] Daniel Zwillinger. Standard mathematical tables and formulae. CRC Press, 30th edition, 1996. ISBN: 0-8493-2479-0.